◆ チェビシェフ多項式とその性質

チェビシェフ多項式の存在

$\cos k\theta$ は $\cos\theta$ の多項式として表せる.
とくに,$\cos\theta = x$ とおくと x の多項式 $T_k(x)$ を用いて $\cos k\theta = T_k(x)$ と表わせ, つぎの漸化式を満たす.

$$T_k(x) = \begin{cases} x & (k=1) \\ 2x^2-1 & (k=2) \\ 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) & (k \geqq 3) \end{cases}$$

例.$\cos 3\theta = 4\cos^3 -3\cos\theta$ より, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

[証明] 数学的帰納法で示す.

$k=1$ のときは明らかに成立. $k=2$ のとき,$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ より成立.

$k = m-2, m-1$ での成立を仮定する.（すなわち,$\cos(m-2)\theta$ と $\cos(m-1)\theta$ は $\cos\theta$ の多項式にできる.）

◀ あとで 3 項間の関係を利用するので, 初期条件が 2 つ必要.

このとき,

$$\cos m\theta + \cos(m-2)\theta = 2\cos(m-1)\theta\cos\theta$$
$$\therefore \cos m\theta = 2\cos(m-1)\theta\cos\theta - \cos(m-2)\theta$$

◀ いわゆる和積の公式.

となるので,$\cos m\theta$ も $\cos\theta$ の多項式.

以上より, すべての自然数 k で補題が成立する. ■

チェビシェフ多項式の性質

(i) $T_k(x)$ の次数は k で, 最高次の係数は 2^{k-1} である.
(ii) $T_k(x)$ のすべての係数は整数である.
(iii) T_{2k-1} の定数項は 0, T_{2k} の定数項は $(-1)^k$ である.

(i)(ii)(iii) のすべてを示す. 数学的帰納法を用いる.
$k = 1, 2$ のとき

$$T_1(x) = x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

より, それぞれ (i)(ii)(iii) を満たす.
$k = m-2, m-1$ で (i)(ii)(iii) の成立を仮定する.

$$T_m(x) = 2xT_{m-1}(x) - T_{m-2}(x)$$

$T_{m-1}(x)$ は $m-1$ 次式, $T_{m-2}(x)$ は $m-2$ 次式なので $T_m(x)$ は m 次式.
$T_{m-1}(x)$ の最高次の係数は 2^{m-2} ゆえ $T_m(x)$ の最高次の係数は 2^{m-1} となる.
また, $T_m(x)$ の定数項は $T_{m-2}(x)$ の定数項を (-1) 倍したもの. したがって (ii) が得られる.
係数は整数倍され, 足し算もしくは引き算されるのみなので, また整数となる. したがって (iii) も成立. ■