計算のコツ* ver0.06

$f\alpha\ell$

2021 年 10 月 24 日

* 速算術, というカッコいい名前もあるらしい

0　はじめに[*1]

計算について, 真面目に考えたのが本冊子である.
計算なんて, と計算をバカにしているのかもしれない. 計算が苦手で数学やりたくない... と思っている人もいるだろう.
筆者はもともと計算ミスが多く[*2] [*3], 改善するために色々な計算の工夫を身につけた. ここには筆者がいつも実践している計算のコツが並んでいる.
全部試してみろとは言わない. 「これなら自分にもできそう」「これはたしかに便利だ」と思ったものを実際に使ってみればいい.
数学の本質は"考えること・議論すること"であり, "計算すること"ではない. あくまでも**計算は道具**だ. 世の中にはたくさんの道具がある. 使えるものは使わないと損ではないか. ぜひ自分でも調べたり, 自分なりの計算の工夫を生み出してほしい. そして道具をうまく使いこなし, "数学"してほしい.

凡例

♡. . . 中学生にもおすすめの項目.
♠. . . 数学 III の内容を含む項目.

[*1] このページは読み飛ばして構わない.
[*2] 今はだいぶ減ったものの, それでも多い. 検算が欠かせない.
[*3] この冊子を書くにあたり, 検算や確認は幾度としたが, ミスが残っているかもしれない.

目次

第 I 部

講義

1 四則演算

まずは四則演算の範囲から．「例示は理解の試金石」という言葉がある[*4]．実際に試してみると, 使いみちが思い浮かぶかもしれない.

1.1 ♡ 0 ができる足し算引き算[*5]

計算の順序はとことん工夫しよう．例えば,

$$\underline{24}+58+\underline{66}+21=\underline{90}+79=169$$

だけでなく,

$$217+\underline{99}=(217+\underline{100-1})=316$$

など 10, 100, 1000 に近い数を見つけたら計算を工夫しよう.

例題 1.1. 次の計算をしなさい.

(1) $12+57+88+43$　(2) $356+99$　(3) $997+439$

解答 1.1. (1) $\underline{12}+57+\underline{88}+43=\underline{100}+100=200$

(2) +99 は「100 足して 1 引く」とみると, 455

(3) +997 は「1000 足して 3 引く」とみると, 1436

工夫の仕方が分かったら, 次の「練習」で試してほしい．慣れると普通に足し算するよりも格段に速い.

練習 1. 次の計算をしなさい.

(1) $22+57+43+78$　(2) $137+69+170-7+31$　(3) $269+31-69+4$

(4) $9+194$　(5) $98+194$　(6) $56+298$

*4 結城浩著『数学ガール』より．余談だが『数学ガール』シリーズは対話形式の数学読み物．数学の有名な問題の雰囲気がつかめ, しかも数学的な議論がなされている．姉妹編の『数学ガールの秘密ノート』シリーズでは中高レベルの数学を, 教科書とは違った切り口で概念を説明している．どちらもおすすめ.

*5 ♡ は中学生にもおすすめの項目．以下同じ.

練習の答え (1)200(2)400(3)235(4)203(5)292(6)354

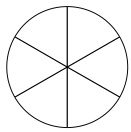
1.2 ♡ よく使う分数の足し算引き算

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ およびその倍数の分数は頻出だ．計算を速くするテクニックがある．

例題 1.2. 次の計算をしなさい．

(1) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}$ (2) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}$

解答 1.2. もちろん通分すれば計算できるのだが，頭の中で図形的に理解しよう．ヒントはピザ．



6 分割のピザを思い浮かべると，$\frac{1}{6}$ は 1 切れ，$\frac{1}{3}$ は 2 切れ，$\frac{1}{2}$ は 3 切れ (半分)．

(1) 半分 (3 切れ) から 3 分の 1(2 切れ) を取ると 1 切れ．つまり $\frac{1}{6}$

(2) 半分 (3 切れ) と 6 分の 1(1 切れ) をあわせて，4 切れ．つまり $\frac{2}{3}$

練習 2. 次の計算をしなさい．

(1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}$ (3) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

(4) $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}$ (5) $\frac{5}{6} - \frac{1}{2}$ (6) $\frac{2}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}$

練習の答え (1)$\frac{5}{6}$(2)$\frac{1}{3}$(3)$\frac{1}{2}$(4)$-\frac{1}{6}$(5)$\frac{1}{3}$(6)0

1.3 ♡ 0ができる掛け算

「1.1 0 ができる足し算引き算 (page.6)」と発想は似ている.

まず大前提として, 掛け算して最後がゼロになるようにするには, (2 の倍数)×(5 の倍数) を作る必要がある. 倍数の判定法は「3.1. 倍数の判定法 (page.13)」にあるのでそれも参考にするとよい.

例題 1.3. 次の計算をしなさい.

(1) $5 \times 7 \times 6$　　(2) $25 \times 9 \times 8$

解答 1.3. (1) $\underline{5} \times 7 \times \underline{6} = \underline{30} \times 7 = 210$

(2) $\underline{25} \times 9 \times \underline{8} = \underline{100 \times 2} \times 9 = 1800$

(1) を見てみると, 筆算なしでも計算がスラスラできるのがわかるだろう. (2) では, $25 \times 4 = 100$ という式を使った. 便利なので覚えておいて損はない.

練習 3. 次の計算をしなさい.

(1) $5 \times 7 \times 3 \times 2$　　(2) $25 \times 29 \times 4$

(3) $5 \times 4 \times 3 \times 5$　　(4) $125 \times 123 \times 8$

練習の答え (1)210(2)2900(3)300(4)123000

1.4 ♡ 小数 ⇔ 分数

(あまりにも突然に) 皆さんは 0.125 は好きですか？

0.125 をただの小数と思っている間は好きになれないかもしれない．ところが, 分数に直すと途端にキレイになるという魅力がある．0.125 とその倍数の 小数 ⇔ 分数 計算はできるととても便利．[*6]

0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$

またこれ以外にも, $0.1 = \dfrac{1}{10}$ も有効.

例題 1.4. 次の計算をしなさい.

(1) 88×0.125 (2) $\dfrac{6}{0.375}$

解答 1.4. (1) $0.125 = \dfrac{1}{8}$ より

$$88 \times 0.125 = 88 \times \frac{1}{8} = 11$$

(2) $0.375 = \dfrac{3}{8}$ より

$$\frac{6}{0.375} = 6 \times \frac{1}{0.375} = 6 \times \frac{8}{3} = 16$$

練習 4. 次の計算をしなさい.

(1) 36×0.25 (2) $7 \div 0.125$ (3) 80×0.75 (4) $\dfrac{1}{0.625}$

[*6] 下の表の小数を見て,「キリが良い」と思えると良い.

練習の答え (1)9(2)56(3)60(4)$\frac{8}{5}$

1.5 ♡ 2 乗の計算

中学 3 年の教科書にもあるように, 2 乗の計算は乗法公式を用いることで工夫して計算ができる. 僕は教科書に載っていない方法をよく用いるので, それも紹介する.

例題 1.5. 次の計算をしなさい.

(1) $87^2 - 13^2$　(2) 51^2　(3) 97^2

解答 1.5. (1) これは (2 乗)-(2 乗) の公式を当てはめる.

$$87^2 - 13^2 = (87 + 13)(87 - 13) = 100 \times 74 = 7400$$

(2) これにも (2 乗)-(2 乗) の公式を当てはめるのがポイント. 51 に足し引きしてキリのいい数字 (今回だと 50) になるように数字を選ぶ (今回だと 1).

$$\begin{aligned} 51^2 - 1^2 = (51 + 1)(51 - 1) = 52 \times 50 = 2600 \\ \therefore 51^2 = 2600 + 1^2 = 2601 \end{aligned}$$

(3) もう一度同じ方法で解いてみる. 97 に足し引きしてキリのいい数字 (今回だと 100) になるように数字を選ぶ (今回だと +3).

$$\begin{aligned} 97^2 - 3^2 = (97 + 3)(97 - 3) = 100 \times 94 = 9400 \\ \therefore 97^2 = 9400 + 3^2 = 9409 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{比較}}$教科書によく載っている方法で解いてみる.

$$97^2 = (100 - 3)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 3 + 3^2 = 10000 - 600 + 9 = 9409$$

どちらが楽と感じるかは, 個人によるだろう. 計算ミスをしない方法を選べば良い.

練習 5. 次の計算をしなさい.

(1) $28^2 - 8^2$　(2) $64^2 - 36^2$　(3) 49^2

(4) 105^2　(5) 998^2

$\therefore$ は「よって」「だから」という意味の記号.

練習の答え (1)720(2)2800(3)2401(4)11025(5)996004

1.6 ♡ 大小比較（四則演算, n 乗根）

大小関係を考察する方法は一通りではないことを確認しよう.

例題 1.6. 次の数の大小関係を答えよ.

(1) $\dfrac{3}{5}, \dfrac{2}{3}$ (2) $\dfrac{2}{19}, \dfrac{3}{23}, \dfrac{6}{47}$ (3) $\sqrt{51}, \dfrac{50}{7}$ (4) $-\sqrt{6}, -2.6, 1$

解答 1.6. (1) これは問題ないであろう. 分母を 15 に揃えることで

$$\frac{3}{5}=\frac{9}{15}<\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

（別解） $\frac{3}{5}=0.6<0.666\cdots=\frac{2}{3}$

(2) この問でも分母を揃えた人は反省してほしい.*7 これは分子を揃えるとうまくいく.

$$\frac{2}{19}=\frac{6}{57} \qquad \frac{3}{23}=\frac{6}{46} \qquad \frac{6}{47}=\frac{6}{47}$$

同じ数を割るとき, 割る数（分母）が大きいほうが数は小さい. よって $\frac{2}{19}<\frac{6}{47}<\frac{3}{23}$

(3) 両方とも正の数なので, 2 乗して比較する.

$$\sqrt{51}^2=51 \qquad \left(\frac{50}{7}\right)^2=\frac{2500}{49}=51+\frac{1}{49}$$

したがって, $\sqrt{51}<\frac{50}{7}$

（別解）通分して, 分子の大小を比較する.

$$\sqrt{51}=\frac{7\sqrt{51}}{7}=\frac{\sqrt{49\times 51}}{7}=\frac{\sqrt{(50-1)(50+1)}}{7}=\frac{\sqrt{2499}}{7}$$
$$\frac{50}{7}=\frac{\sqrt{2500}}{7}$$

したがって, $\sqrt{51}<\frac{50}{7}$

(4) まず, 正の数である 1 が一番大きい. 負の数同士の**絶対値**を比較すると

$$(-\sqrt{6})^2=6 \qquad (-2.6)^2=5.72$$

したがって, $\sqrt{6}>2.6$ すなわち, $-\sqrt{6}<-2.6$

以上より, $-\sqrt{6}<-2.6<1$

練習 6. 次の数の大小関係を答えよ.

(1) $\frac{5}{12}, \frac{3}{7}$ (2) $\frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{11}{6}$ (3) $\frac{5}{85}, \frac{4}{71}$

(4) $\frac{3}{47}, \frac{6}{113}$ (5) $\sqrt{31}, \frac{50}{9}$ (6) $-\sqrt{3}, -1.4, 1.2$

---

*7 分母の 3 数はすべて素数だから, 最小公倍数は $19\times 23\times 47=20539$

練習の答え (1) $\frac{5}{12}<\frac{3}{7}$ (2) $\frac{5}{3}<\frac{7}{4}<\frac{11}{6}$ (3) $\frac{5}{85}>\frac{4}{71}$ (4) $\frac{6}{113}<\frac{3}{47}$ (5) $\sqrt{31}>\frac{50}{9}$ (6) $-\sqrt{3}<-1.4<1.2$

2 暗記モノ

計算を一番速くする方法は, 間違いなく暗記であろう. 実際掛け算九九は暗記していないと使い物にならない. 九九ほどではないが, ぜひ覚えておきたいものをまとめる.

2.1 ♡ 2 乗の値

n	n^2	語呂
11	121	
12	144	
13	169	
14	196	
15	225	イゴイゴニニゴ*8
16	256	いろいろ煮込む
17	289	いいないいな 2 泊
18	324	いやいやみつよ
19	361	行く行く寒い
23	529	兄さん兄さんゴニックー！*9
25	625	ニゴニゴムツゴ*10
45	2025	

$45^2 = 2025$ は年号絡みの問題が出たときに使えるので, これも覚えておきたい.

2.2 ♡ 累乗の値

こちらは暗記というよりも, （指を折りながら）スラスラ言えることが重要.

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6				
3	9	27	81	243	729				
5^1	5^2	5^3	5^4						
5	25	125	625						

*8 意味はわからないです. 語感がお気に入り

*9 こんなこと弟妹に言われたら引きますね.

*10 やはり意味はわからないです. 15 とセットで覚えましょう.

3 整数

3.1 ♡ 倍数判定法

ここで便利な倍数判定法を紹介しておこう[*11].

2 の倍数	下 1 桁が 2 の倍数
3 の倍数	各位の総和が 3 の倍数
4 の倍数	下 2 桁が 4 の倍数
5 の倍数	下 1 桁が 5 の倍数
8 の倍数	下 3 桁が 8 の倍数
9 の倍数	各位の総和が 9 の倍数
11 の倍数	[発展] 各位の交代和[*12]が 11 の倍数
2^n の倍数	[発展] 下 n 桁が 2^n の倍数
5^n の倍数	[発展] 下 n 桁が 5^n の倍数

あれ, 6 の倍数は？ と思った人もいるかもしれないが, 6 の倍数は「2 の倍数かつ 3 の倍数」である. 10 の倍数も同様に 「2 の倍数かつ 5 の倍数」だ.(10 の倍数は 1 の位ですぐわかってしまうが.)

あれ, 7 の倍数は？ と思った人もいるかもしれない. 7 の倍数の判定法はなかなか使う場面がないが, (大学) 入試問題に証明が出たことはある. 気になる人は巻末資料へ.

例題 3.1. $N = 53124$ について, 次の命題の正誤を答えよ.

(1) N は 2 の倍数. (2) N は 3 の倍数. (3) N は 4 の倍数.
(4) N は 9 の倍数. (5) N は 11 の倍数. (6) N は 12 の倍数.

解答 3.1. (1) 一の位が 4 より, 2 の倍数である. 正.
(2) 各位の和は $5+3+1+2+4=15$ で, 15 は 3 の倍数. 正.
(3) 下 2 桁は 24 で, これは 4 の倍数. 正.
(4) 各位の和は $5+3+1+2+4=15$ で, 15 は 9 の倍数でない. 誤.
(5) 交代和は $5-3+1-2+4=5$ で, 5 は 11 の倍数でない. 誤.
(6) (2), (3) より, 3 の倍数かつ 4 の倍数なので, 12 の倍数. 正.

練習 7. $N = 6732$ について, 次の文の正誤を答えよ.

(1) N は 3 の倍数. (2) N は 4 の倍数. (3) N は 12 の倍数. (4) N は 11 の倍数.

[*11] 証明は巻末資料に.
[*12] 交代和とは (一の位) − (十の位) + (百の位) − (千の位) + ⋯ のように各位を順に足し引きしたもの.
練習の答え (1) 正 (2) 正 (3) 正 (4) 正

3.2 ♡ 最小公倍数・最大公約数

数字が 2 つや 3 つ与えられ, その最小公倍数・最大公約数を求めよという問題も（高校入試で）時折出題される. もちろん素因数分解して計算してもよいのだが, もう少し楽にやる方法がある.

例題 3.2. それぞれの数字の組について, 最小公倍数・最大公約数を求めよ.

(1) 24, 36　　(2) 24, 36, 40

解答 3.2. (1) まずは 2 数の場合. 数字（24, 36）を横に並べ, それぞれの公約数で割る. （今回はまず 2 で割った.）割った数をそのまま下に書き, この操作を繰り返す.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 24 & 36 \\ \hline 2 & 12 & 18 \\ \hline 3 & 6 & 9 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

このような図ができるだろう.

左の実線で囲った数字の積 $2 \times 2 \times 3 = 12$ が最大公約数.

左の実線＋下の点線に出てきた数字の積 $2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$ が最小公倍数.

(2) 続いて 3 数の場合.

数字（24, 36）を横に並べ, **3 数の公約数で**割る. （今回はまず 2 で割った.）割った数をそのまま下に書き, この操作を繰り返す.

その後, **2 個の数字だけでも割れる数があれば割る**. （3 行目の 2 は, 9 を割り切れない. このような場合は他の数字は 2 で割り, 9 はそのまま下ろす.）

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 24 & 36 & 40 \\ \hline 2 & 12 & 18 & 20 \\ \hline 2 & 6 & 9 & 10 \\ \hline 3 & 3 & 9 & 5 \\ \hline & 1 & 3 & 5 \end{array}$$

左の実線で囲った数字（3 つの数字を割れた数字）の積 $2 \times 2 = 4$ が最大公約数.

左の実線と点線＋下の点線に出てきた数字の積 $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 1 \times 3 \times 5 = 360$ が最小公倍数.

練習 8. それぞれの数字の組について, 最小公倍数・最大公約数を求めよ.

(1) 42, 56　　(2) 24, 40, 56　　(3) 35, 84, 112

練習の答え 最小公倍数, 最大公約数の順. (1)14, 168(2)8, 840(3)7, 1680

4 式・関数

4.1 部分分数分解

部分分数分解は, 数列や積分で頻出だ. 計算するときにおさえておきたいコツを述べる.

公式 4.1. $\dfrac{1}{n(n+k)} = \dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+k}\right)$

証明は略. 右辺を通分すれば左辺が得られる.

例題 4.1. 次の和を計算せよ.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$$

解答 4.1. この式は部分分数分解に時間をかけてはいけない. 分母は差が 2 である数同士の積だから,

$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

となる. (引き算の順序を間違えないように. $k < k+2$ より, $\frac{1}{k} > \frac{1}{k+2}$ である.)

したがって,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\right. \\ &\qquad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

練習 9. 次の和を計算せよ.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}$$

練習の答え $\dfrac{n}{n+1}$

また, 一般の部分分数分解に対して次のような変形が効果的.

例題 4.2. 次の等式中の a, b は実数である. a, b を求めよ.

$$\frac{11x+17}{2x^2+8x+6} = \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x+1}$$

解答 4.2. まずは左辺を因数分解する.

$$\begin{aligned}\frac{11x+17}{2x^2+8x+6} &= \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x+1}\\ \frac{11x+17}{2(x+3)(x+1)} &= \frac{a}{x+3} + \frac{b}{x+1}\end{aligned}$$

両辺に $2(x+3)(x+1)$ をかけて

$$11x+17 = 2a(x+1) + 2b(x+3)$$

$x=-1$ を代入して[*13]

$$\begin{aligned}6 &= 2a\cdot 0 + 4b\\ \therefore b &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$x=-3$ を代入して

$$\begin{aligned}-16 &= -4a + 2b\cdot 0\\ \therefore a &= 4\end{aligned}$$

比較 一般的な解法で解いてみる. 分母を払うところまでは同じ.

$$\begin{aligned}&11x+17 = 2a(x+1) + 2b(x+3)\\ &11x+17 = 2ax + 2a + 2bx + 6b\\ &(11-2a-2b)x + (17-2a-6b) = 0\end{aligned}$$

x についての恒等式なので

$$\begin{cases}11-2a-2b=0\\ 17-2a-6b=0\end{cases}$$

連立方程式を解いて, $a=4, b=\dfrac{3}{2}$

[*13] このように解いても問題ない. (解き方の正当性は, 巻末資料にて証明することとする.)

例題 4.3. 次の等式中の a,b,c は実数である．a,b,c を求めよ．

$$\frac{2x^2-x-46}{3(x-1)^2(x+2)}=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}$$

解答 4.3.

$$\frac{2x^2-x-46}{3(x-1)^2(x+2)}=\frac{a}{(x-1)^2}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+2}$$

両辺に $3(x-1)^2(x+2)$ をかけて

$$2x^2-x-46=3a(x+2)+3b(x-1)(x+2)+3c(x-1)^2$$

$x=1$ を代入して

$$-45=9a \qquad \therefore a=-5$$

$x=-2$ を代入して

$$-36=27c \qquad \therefore c=-\frac{4}{3}$$

$x=2$ を代入して (2 でなくてもよいが, 計算が楽そうなものを選択するとよい)

$$\begin{aligned}-40&=3\cdot(-5)\cdot 4+3b\cdot 1\cdot 4+3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\cdot 1^2\\ 12b&=24 \qquad \therefore b=2\end{aligned}$$

余談だが, 2 乗の項が含まれるときの部分分数分解は上のように分母が 2 乗の項と 1 乗の項に分けて行う．

練習 10. 次の等式中の a,b,p,q,r は実数の定数である．a,b,p,q,r を求めよ．

(1) $\dfrac{7x-11}{4x^2+8x-12}=\dfrac{a}{x+3}+\dfrac{b}{x-1}$

(2) $\dfrac{-x^2+x+6}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{p}{(x-1)^2}+\dfrac{q}{x-1}+\dfrac{r}{x+1}$

練習の答え $(1)a=2,b=-\frac{1}{4}(2)p=3,q=-2,r=1$

4.2　2 次方程式

$ax^2+bx+c=0$ の解はあまりに有名だが, ここでは b が偶数であるときに少しだけ計算が速くなる解の公式を紹介する.

公式 4.2. $ax^2+2b'x+c=0$ のとき,（すなわち, $b'=\frac{b}{2}$）

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}$$

証明. [*14] $ax^2+bx+c=0$ の解は

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$b=2b'$ を代入して

$$\begin{aligned}x&=\frac{-2b'\pm\sqrt{(2b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm\sqrt{4(b')^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm2\sqrt{(b')^2-ac}}{2a}\\&=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}\end{aligned}$$

（証明終）

例題 4.4. 次の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2-8x+4=0$　(2) $6x^2-10x-3=0$

解答 4.4. (1) $x^2-8x+4=0$ より

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{1}=4\pm\sqrt{12}=4\pm2\sqrt{3}$$

(2) $6x^2-10x-3=0$ より

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25+18}}{6}=\frac{5\pm\sqrt{43}}{6}$$

練習 11. 次の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2-4x-10=0$　(2) $x^2-12x+3=0$　(3) $8x^2-10x-9=0$

[*14] 証明と書いてあるが, 大層なものではない.

練習の答え (1)$x=2\pm\sqrt{14}$ (2)$x=6\pm\sqrt{33}$ (3)$x=\frac{5\pm\sqrt{97}}{8}$

4.3 2次方程式の判別式

「4.2 2次方程式 (page.18)」と発想は同じ.

$ax^2+bx+c=0$ の判別式を D として, ここでは b が偶数であるときに少しだけ計算が速くなる方法を紹介する.

公式 4.3. $ax^2+2b'x+c=0$ のとき,（すなわち, $b'=\frac{b}{2}$）

$$\frac{D}{4}=(b')^2-ac$$

証明. $ax^2+bx+c=0$ の判別式は

$$D=b^2-4ac$$

$b=2b'$ を代入して

$$D=(2b')^2-4ac=4\left\{(b')^2-ac\right\}$$
$$\frac{D}{4}=(b')^2-ac$$

（証明終）

例題 4.5. 次の2次方程式の実数解の個数を答えよ.

(1) $x^2-8x+4=0$　　(2) $6x^2-4x+3=0$

解答 4.5. (1) $x^2-8x+4=0$ より

$$\frac{D}{4}=(-4)^2-4=12>0$$

より, 実数解は2個.

(2) $6x^2-4x+3=0$ より

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-6\cdot3=-14<0$$

より, 実数解は0個.

練習 12. 次の2次方程式の実数解の個数を求めよ.

(1) $x^2-4x-10=0$　　(2) $x^2-6x+3=0$　　(3) $8x^2-10x+9=0$

練習の答え (1)2個 (2)2個 (3)0個

4.4 高次方程式の解

高次方程式の解を求めるときには因数定理が活躍するが, その因数定理をより活用できる定理を紹介する.*[15]

定理 4.4 (高次方程式の有理数解)**.** $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の**有理数解**は $\pm\dfrac{d\text{ の約数}}{a\text{ の約数}}$, $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ の**有理数解**は $\pm\dfrac{e\text{ の約数}}{a\text{ の約数}}$ となる.

この方法で, 有理数である解は**すべて**求めることができる.

例題 4.6. 次の方程式の解を, 複素数の範囲で全て求めよ.

$$x^3-4x^2-4x-5=0$$

解答 4.6. パット見で因数分解できればいいが, 難しいときは因数定理を用いる. 因数定理では解になりそうな値を手当たりしだいに代入して, 式の値が 0 になるか確かめるしかない.

「手当たりしだいに」, と言ったが上の定理を用いれば $\pm\dfrac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の約数}}$ **のみ**を代入すればいいことがわかる.

$f(x)=x^3-4x^2-4x-5=0$ において, 定理より解の候補は $\pm1,\pm5$

（計算が楽そうなものから）順に試していくと, $f(1)=-12, f(-1)=-6, f(5)=0$ となり, $x=5$ はこの方程式の解となることがわかる.

したがって, $(x-5)$ で $f(x)$ をわれば, $f(x)=(x-5)(x^2+x+1)$ となることがわかる.

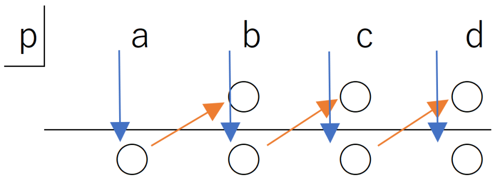
以上より, この方程式の解は, $x=5, \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

*15 定理の証明は巻末資料に.

4.5　組立除法

定理 4.5. 組立除法とは,「多項式」を「1 次式」で割った商と余りを計算する方法.
　そのやり方は,[*16]

(i) 割られる多項式の係数を左から順に書く.（係数ゼロに気をつける！）
(ii) 割る 1 次式 $x-p$ の p を左上に書く.（符号に注意！）
(iii) 左下の○から順に計算する. 下に行くときは足し算, 右上に行くときは p 倍する.



(iv) 3 行目に出てきた数字が, 商の係数と余りになる.

　言葉で説明するのは難しいので, 具体例をあげよう.

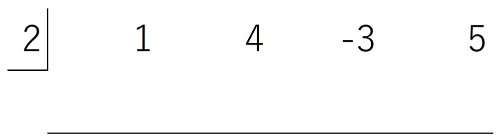
[*16] 証明は巻末資料に.

例題 4.7. x^3+4x^2-3x+5 を $x-2$ で割った商と余りを求めよ．

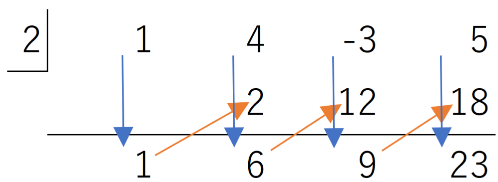
解答 4.7. x^3+4x^2-3x+5 を $x-2$ で割るとき，

(i) 割られる多項式の係数を左から順に書く．今回だと $1, 4, -3, 5$.

(ii) 割る 1 次式 $x-p$ の p を左上に書く．（符号に注意！）今回だと 2.



(iii) 左下から順に計算する．
左下は（足すものがないので）1 行目の 1 をそのまま入れる．その右上に 2 倍した 2 をいれる．
$4+2=6$ を 3 行目にいれ，右上に 2 倍した 12 を入れる．
$(-3)+12=9$ を 3 行目にいれ，右上に 2 倍した 18 を入れる．
$5+18=23$ を 3 行目にいれる．



(iv) 3 行目に出てきた数字が，商の係数と余りになる．
3 行目の一番右の 23 が余りとなる．
3 行目の残りの数字は，左から順に 1, 6, 9 であり，これが商の係数となる．すなわち，商は x^2+6x+9.

もう 1 問例題を解いてみる.

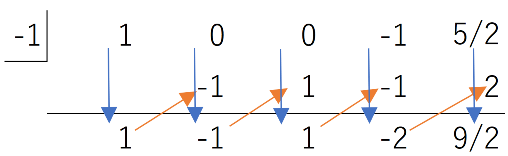
例題 4.8. $x^4 - x + \frac{5}{2}$ を $x+1$ で割った商と余りを求めよ.

解答 4.8. $x^4 - x + \frac{5}{2}$ を $x+1$ で割るとき,

(i) 割られる多項式の係数を左から順に書く.(係数ゼロに気をつける！)
今回だと $1, 0, 0, -1, \frac{5}{2}$.

(ii) 割る 1 次式 $x - p$ の p を左上に書く.（符号に注意！）
今回だと -1.

(iii) 左下から順に計算する.
左下は（足すものがないので）1 行目の 1 をそのまま入れる．その右上に -1 倍した -1 をいれる.
$0 + (-1) = -1$ を 3 行目にいれ, 右上に -1 倍した 1 を入れる.
$0 + 1 = 1$ を 3 行目にいれ, 右上に -1 倍した -1 を入れる.
$(-1) + (-1) = -2$ を 3 行目にいれ, 右上に -1 倍した 2 を入れる.
$\frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$ を 3 行目にいれる.



(iv) 3 行目に出てきた数字が, 商の係数と余りになる.
3 行目の一番右の $\frac{9}{2}$ が余りとなる.
3 行目の残りの数字は, 左から順に $1, -1, 1, -2$ であり, これが商の係数となる．すなわち, 商は $x^3 - x^2 + x - 2$.

練習 13. つぎの A を B で割った商と余りを求めよ.

(1) $A = x^3 + 2x^2 + 4x + 1, B = x - 2$　　(2) $A = x^4 + 2x^2 + 4x, B = x + 1$

練習の答え (1) 商 $x^2 + 4x + 12$, 余り 25 (2) 商 $x^3 - x^2 + 3x + 1$, 余り -1

最後に組立除法の応用を述べる.

例題 4.9. 次の方程式の解を複素数の範囲ですべて求めよ.

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

解答 4.9. 与えられた方程式の有理数解の候補は, 「4.4 高次方程式の解 (page.20)」を用いると $x=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$ に絞られる.

$(x-1)$ で割ると,

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

余りが 0 になるから $(x-1)$ で割り切れる, すなわち $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)$

$$\begin{aligned} x^3-6x^2+11x-6&=0 \\ (x-1)(x^2-5x+6)&=0 \\ (x-1)(x-2)(x-3)&=0 \end{aligned}$$

したがって, $x=1,2,3$

練習 14. 次の方程式を複素数の範囲で解け.

(1) $x^3-x^2-x-15=0$

(2) $x^4+3x^3-23x^2+24x+4=0$

練習の答え (1) 左辺を因数分解すると $(x-3)(x^2+2x+5)=0$ となるので $x=3,-1\pm2i$
(2) 左辺を因数分解すると $(x-2)^2(x^2+7x+1)=0$ となるので $x=2,\ \frac{-7\pm3\sqrt{5}}{2}$

4.6 対称式

x, y の多項式のうち, x と y を入れ替えても, 元の式と同じになるものを対称式という. 例えば, $x^2+y^2, xy, \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ は対称式である. $x-y, x^2-y^2, x+2y$ は対称式でない.

文字が 3 文字でも, 同じことを考えられる. x, y, z の多項式のうち, x, y, z を好きなように入れ替えても, 元の式と同じになるものを対称式という. 例えば, $x^2+y^2+z^2, xyz, \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}$ は対称式である. $x-y+z, x^2-y^2+z^2, x+y+z^2$ は対称式でない.

2 個の変数 x, y のとき,

$$x+y, xy$$

の 2 式を, 基本対称式という.

3 個の変数 x, y, z のとき,

$$x+y+z, xy+yz+zx, xyz$$

の 3 式を, 基本対称式という.

対称式について, 次のような定理がある. *17

定理 4.6 (対称式の基本定理)**.** すべての対称式は基本対称式のみを用いて一意に表すことができる.

*17 巻末資料に証明を載せているが, 決して容易ではない. 興味のある人は読んでみてほしいが, 大学入試レベルでは問われることはないだろう.

対称式の基本定理を用いて次の問題を問いてみる.

例題 4.10 (松山大, 愛知工大・改)**.** $x+y+z=0, xy+yz+zx=-10, xyz=-4\sqrt{3}$ のとき, 次の式の値を求めよ.

(1) $x^2+y^2+z^2$ (2) $x^3+y^3+z^3$

(3) $x^4+y^4+z^4$ (4) $(x+y)(y+z)(z+x)$

x, y, z を求めることは可能かもしれないが, 現実的ではない. 対称式の考え方を用いる.

解答 4.10. 3 文字なので, 基本対称式は $x+y+z, xy+yz+zx, xyz$

(1) $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=0-2\cdot(-10)=20$

(2) $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ を用いて,

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz \\ &= 0\cdot(20+10)-12\sqrt{3}=12\sqrt{3} \end{aligned}$$

(3) (1) を用いて,

$$\begin{aligned} (x^2+y^2+z^2)^2 &= 20^2 \\ \Leftrightarrow x^4+y^4+z^4+2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) &= 400 \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} (xy+yz+zx)^2 &= (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+2(xy^2z+xyz^2+x^2yz) \\ (x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) &= (xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z) \\ &= (-10)^2-2\cdot(-4\sqrt{3})\cdot 0=100 \\ \therefore x^4+y^4+z^4 &= -2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+400 \\ &= 2\cdot(-100)+400=200 \end{aligned}$$

(4) 仮定の式 $x+y+z=0$ をうまく用いる.

$$(x+y)(y+z)(z+x)=(-z)(-x)(-y)=-xyz=4\sqrt{3}$$

練習問題は 2 次式. ぜひ取り組んでみてほしい.

練習 15 (自治医大)**.** $x=2+\sqrt{3}, y=2-\sqrt{3}$ のとき, $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)$ の値を求めよ.

練習の答え 与式 $=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4^2-2\cdot 1}{1}=7$

5 微分・積分

5.1 ♠ 部分積分[*18][*19]

公式 5.1. $\displaystyle\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$

$$= \overbrace{f(x)}^{\text{そのまま}}\ \underbrace{G(x)}_{\text{積分する}} - \overbrace{f'(x)}^{\text{微分する}}\ \underbrace{G_{(2)}(x)}_{\text{積分する}} + \overbrace{f''(x)}^{\text{微分する}}\ \underbrace{G_{(3)}(x)}_{\text{積分する}} - \overbrace{f^{(3)}(x)}^{\text{微分する}}\ \underbrace{G_{(4)}(x)}_{\text{積分する}} + \cdots$$

ただし, $G(x) = \displaystyle\int g(x)\,\mathrm{d}x, G_{(2)}(x) = \int G(x)\,\mathrm{d}x, G_{(3)}(x) = \int G_{(2)}(x)\,\mathrm{d}x, \cdots$

証明. 部分積分とは, 以下の計算のことを指すのであった.

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

記号を置き換えると

$$\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

これを繰り返すと

$$\begin{aligned}\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(x)G(x) - \left(f'(x)G_{(2)}(x) - \int f''(x)G_{(2)}(x)\,\mathrm{d}x\right) \\ &= f(x)G(x) - f'(x)G_{(2)}(x) + \left(f''(x)G_{(3)}(x) - \int f^{(3)}G_{(3)}\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

（証明終）

例題 5.1. 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^2e^{2x}\,\mathrm{d}x$ (2) $\displaystyle\int x^4\cos 2x\,\mathrm{d}x$ (3) $\displaystyle\int (x^3-2x+1)e^x\,\mathrm{d}x$

解答 5.1. (1) 順番に部分積分してもよいのだが, 一気に解答を書くことができる.

$$\begin{aligned}\int x^2e^{2x}\,\mathrm{d}x &= \overbrace{x^2}^{\text{そのまま}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{\text{積分する}} - \overbrace{2x}^{\text{微分する}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}e^{2x}}_{\text{積分する}} + \overbrace{2}^{\text{微分する}} \cdot \underbrace{\frac{1}{8}e^{2x}}_{\text{積分する}} \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C\end{aligned}$$

[*18] ♠ は数学 III の内容を含む項目. 以下同じ.

[*19] このコツは「瞬間部分積分」と呼ばれることもある. 非正式な名称.

(2) さすがに 4 次になると, 部分積分を 4 回やるのはつらい. 符号が毎回反転することに気をつける.

$$
\begin{aligned}
\int x^4 \cos 2x \, \mathrm{d}x = &\overbrace{x^4}^{\text{そのまま}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\sin 2x}_{\text{積分する}} - \overbrace{4x^3}^{\text{微分する}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}(-\cos 2x)}_{\text{積分する}} \\
&+ \overbrace{12x^2}^{\text{微分する}} \cdot \underbrace{\frac{1}{8}(-\sin 2x)}_{\text{積分する}} - \overbrace{24x}^{\text{微分する}} \cdot \underbrace{\frac{1}{16}\cos 2x}_{\text{積分する}} \\
&+ \overbrace{24}^{\text{微分する}} \cdot \underbrace{\frac{1}{32}\sin 2x}_{\text{積分する}} \\
&= \left(\frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}\right)\sin 2x + \left(x^3 - \frac{3}{2}x\right)\cos 2x + C
\end{aligned}
$$

(3) $f(x) = x^3 - 2x + 1$ とみる.

$$
\begin{aligned}
&\int (x^3 - 2x + 1)e^x \, \mathrm{d}x \\
=&\overbrace{(x^3 - 2x + 1)}^{\text{そのまま}} \cdot \underbrace{e^x}_{\text{積分する}} - \overbrace{3x^2 - 2}^{\text{微分する}} \cdot \underbrace{e^x}_{\text{積分する}} \\
&+ \overbrace{6x}^{\text{微分する}} \cdot \underbrace{e^x}_{\text{積分する}} - \overbrace{6}^{\text{微分する}} \cdot \underbrace{e^x}_{\text{積分する}} \\
=&(x^3 - 3x^2 + 4x - 3)e^x + C
\end{aligned}
$$

練習 16. 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int x^3 e^x \, \mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int x^2 3^x \, \mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int (2x^2 + 1)\sin\frac{x}{2} \, \mathrm{d}x$

例題をもう少し.

練習の答え (1)$(x^3 - 3x^2 + 6x - 6)e^x + C$ (2)$\dfrac{3^x\left\{x^2(\log 3)^2 - 2x\log 3 + 2\right\}}{(\log 3)^3} + C$
(3)$-(4x^2 - 30)\cos\dfrac{x}{2} + 16x\sin\dfrac{x}{2} + C$

例題 5.2. 次の不定積分を求めよ.

$$\int (x\log x)^2\,\mathrm{d}x$$

解答 5.2. log はそのままではこの公式は用いることができない. （一応やってみると, ）

$$\int x^2(\log x)^2\,\mathrm{d}x = \overbrace{(\log x)^2}^{\text{そのまま}}\cdot \underbrace{\frac{1}{3}x^3}_{\text{積分する}} - \overbrace{\frac{2\log x}{x}}^{\text{微分する}}\cdot \underbrace{\frac{1}{12}x^4}_{\text{積分する}} + \overbrace{\frac{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{x}-2\log x\cdot\frac{1}{x}}{x^2}}^{\text{微分する}}\cdots$$

（このように log の形がいつまで立っても消えない.）しかし, $x=e^t$ と置換することでうまくいく. $\mathrm{d}x = e^t\,\mathrm{d}t$ より

$$\begin{aligned}
\int x^2(\log x)^2\,\mathrm{d}x &= \int \left(e^t\right)^2\cdot t^2\cdot e^t\,\mathrm{d}t \\
&= \int e^{3t}t^2\,\mathrm{d}t \\
&= \overbrace{t^2}^{\text{そのまま}}\cdot\underbrace{\frac{1}{3}e^{3t}}_{\text{積分する}} - \overbrace{2t}^{\text{微分する}}\cdot\underbrace{\frac{1}{9}e^{3t}}_{\text{積分する}} + \int\overbrace{2}^{\text{微分する}}\cdot\underbrace{\frac{1}{27}e^{3t}}_{\text{積分する}} \\
&= \frac{1}{3}t^2e^{3t} - \frac{2}{9}te^{3t} + \frac{2}{27}e^{3t} + C \\
&= \left\{\frac{1}{3}(\log x)^2 - \frac{2}{9}\log x + \frac{2}{27}\right\}x^3 + C
\end{aligned}$$

となり, うまく積分できることがわかる.

練習 17. 次の不定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int (\log 2x)^2\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{(\log x)^3}{x^2}\,\mathrm{d}x$

練習 の答え (1)$x\left\{(\log 2x)^3 - 3(\log 2x)^2 + 6\log 2x - 6\right\} + C$
(2)$-\dfrac{(\log x)^3 + 3(\log x)^2 + 6\log x + 6}{x} + C$

第 II 部
補講

補講パートでは, 高校で習うことにはなっていないもののうち, 使えると便利なものを紹介する.

6 合同式

難しい整数問題を考えるうえで, 合同式の考え方を知るか知らないかでは, 計算量に大きな違いが生じる. 少しでも計算量を減らし, 時間の短縮やミスを減らすことにつなげられるよう, 合同式の考え方を身に着けておこう.

6.1 合同式とは

合同式とはあまりが等しいことを示す式である.

定義 6.1. a と b を n で割ったあまりが同じであることを, [*20]

$$a \equiv b \pmod{n}$$

のように記号 $\equiv$, mod を用いて書き[*21], 「a 合同 b モッド n」や, 「a と b は n を法として合同」と読む.

これを用いれば, 次のように書ける.

$$\begin{aligned} 7 &\equiv 11 \pmod{4} \\ 9 &\equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

整数問題では, 後述のように, あまりのみを考えれば十分な問題が多くある. そのような問題にとても強力なツールになる.

[*20] 本章では, 特に断らない限り, 文字は整数を表すとする.
[*21] イコールではなく, 図形の合同と同じ 3 本線.

6.2 合同式の性質

合同式には以下の性質がある.

定理 6.2. mod$n$ として, $a \equiv b$ のとき, [*22]

(1) $a + c \equiv b + c$
(2) $a - c \equiv b - c$
(3) $ac \equiv bc$
(4) $a^k \equiv b^k$

この定理は, **足し算・引き算・掛け算に関しては, 普通の計算と同様**と言っている. [*23]

注意 6.3. 注意しなければいけないのは, 割り算である. $a \div c$ と $b \div c$ **は合同とは限らない**.
例えば $n = 2, a = 12, b = 8, c = 4$ とすれば

$$12 \equiv 8 \pmod 2$$

だが,

$$12 \div 4 = 3 \equiv 1$$
$$8 \div 4 = 2 \equiv 0$$

より, $a \div c$ と $b \div c$ は合同ではない. **合同式では割り算は用いないが**無難である. [*24]

注意 6.4. 式中に出てくる数字は負の数でも構わない.
$5 \equiv 2 \pmod 3$ であるから, 両辺から 3 をひいて $2 \equiv -1 \pmod 3$
したがって, $5 \equiv -1 \pmod 3$ [*25]

例題 6.1. a を b で割った時のあまりを求めよ.

(1) $a = 25, b = 4$
(2) $a = 101 \times 103, b = 25$
(3) $a = 3^6, b = 5$

解答 6.1. (1) これは合同式を使うまでもない.25 を 4 で割ったときのあまりは 1.
(2) 掛け算の計算をするのは面倒. mod25 で計算する.

$$101 \times 103 \equiv 1 \times 3 \equiv 3$$

[*22] 同じ数でのモッドを考えるとき, このように一番初めに宣言して, 後ろの合同式では省略することがある.
[*23] 証明は巻末資料に.
[*24] 巻末資料では, 割り算を使用しても問題ない条件を考察している. 入試問題を解く上では必要ないが, 興味のある人は読んでみてほしい.
[*25] 合同式の計算としては正しいが, 「あまりは -1」とは言わない. n でわったあまりは $0, 1, \cdots, n-1$ のどれかである.

よりあまりは 3.

(3) $3^4 = 81$ であるから, 5 で割ったあまりが 1 となることを利用する. mod5 で計算する.

$$3^6 = 3^4 \times 3^2 \equiv 1 \times 4 \equiv 4$$

より, あまりは 4.

6.3 合同式の使い方

例題 6.2. $3^{100}, 3^{2019}$ を 7 で割ったあまりをそれぞれ求めよ.

解答 6.2. $3^n \equiv 1 \pmod 7$ となる n を探す. 以下, mod7 とする.

$$
\begin{aligned}
3^1 &= 3 \\
3^2 &= 9 \equiv 2 \\
3^3 &= 3^2 \cdot 3^1 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6 \\
3^4 &= 3^3 \cdot 3^1 \equiv 6 \cdot 3 \equiv 18 \equiv 4 \\
3^5 &= 3^4 \cdot 3^1 \equiv 4 \cdot 3 \equiv 12 \equiv 5 \\
3^6 &= 3^5 \cdot 3^1 \equiv 5 \cdot 3 \equiv 15 \equiv 1
\end{aligned}
$$

$3^6 \equiv 1$ であることを利用して, あまりを求めたい式を変形する.

$$
\begin{aligned}
3^{100} &= 3^{6\times 16} \times 3^4 = \left(3^6\right)^{16} \times 3^4 \equiv 1^{16} \times 4 \equiv 4 \\
3^{2019} &= 3^{6\times 336} \times 3^3 = \left(3^6\right)^{336} \times 3^3 \equiv 1^{336} \times 6 \equiv 6
\end{aligned}
$$

(別解)「あまり -1」[*26]をうまく使うともう少し計算を減らせる.

$$
\begin{aligned}
3^1 &= 3 \\
3^2 &= 9 \equiv 2 \\
3^3 &= 3^2 \cdot 3^1 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6 \equiv -1
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
3^{100} &= 3^{3\times 33} \times 3^1 = \left(3^3\right)^{33} \times 3^1 \equiv (-1)^{33} \times 3 \equiv -3 \equiv 4 \\
3^{2019} &= 3^{3\times 673} = \left(3^3\right)^{673} \equiv (-1)^{673} \equiv -1 \equiv 6
\end{aligned}
$$

[*26] 先程も述べたが, n でわったあまりは $0, 1, \cdots, n-1$ のどれかである. ここでは便宜上用いたが, 答案等に「あまり -1」などと書いてはいけない.

第 III 部
巻末資料

A 倍数判定法

A.1 3の倍数, 9の倍数

定理 A.1. 自然数 N に対し,

(a) N が 3 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の各位の総和が 3 の倍数

(b) N が 9 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の各位の総和が 9 の倍数

証明. N が 4 桁の整数のときの証明.[*27]

$N = 1000a + 100b + 10c + d$ とする.$(0 \leqq a, b, c, d \leqq 9)$

(a) N を 3 で (無理矢理) くくる.

$$\begin{aligned} N &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= (3 \cdot 333 + 1)a + (3 \cdot 33 + 1)b + (3 \cdot 3 + 1)c + d \\ &= 3(333a + 33b + 3c) + (a + b + c + d) \end{aligned}$$

$3(333a + 33b + 3c)$ は 3 の倍数なので, N が 3 の倍数 $\Leftrightarrow$ $a + b + c + d$ が 3 の倍数
ここで, $a + b + c + d$ は各位の和である.

(b) N を 9 で (無理矢理) くくる.

$$\begin{aligned} N &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= (9 \cdot 111 + 1)a + (9 \cdot 11 + 1)b + (9 + 1)c + d \\ &= 9(111a + 11b + c) + (a + b + c + d) \end{aligned}$$

$9(111a + 11b + c)$ は 3 の倍数なので, N が 9 の倍数 $\Leftrightarrow$ $a + b + c + d$ が 9 の倍数
ここで, $a + b + c + d$ は各位の和である.

（証明終）

[*27] 一般の桁数でも証明は同様.

A.2　4 の倍数, 25 の倍数, 8 の倍数

定理 A.2. 自然数 N に対し,

(a) N が 4 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の下 2 桁が 4 の倍数
(b) N が 25 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の下 2 桁が 25 の倍数
(c) N が 8 の倍数 $\Leftrightarrow$ N の下 3 桁が 8 の倍数

証明. (a) $N = 100n + 10a + b$ とする.$(0 \leqq a, b \leqq 9, n \geqq 0)$ [*28]
N を 4 でくくる.

$$\begin{aligned} N &= 100n + 10a + b \\ &= 4 \cdot 25n + (10a + b) \end{aligned}$$

$4 \cdot 25n$ は 4 の倍数なので, N が 4 の倍数 $\Leftrightarrow$ $10a + b$ が 4 の倍数
ここで, $10a + b$ は下 2 桁である.

(b) $N = 100n + 10a + b$ とする.$(0 \leqq a, b \leqq 9, n \geqq 0)$
N を 25 でくくる.

$$\begin{aligned} N &= 100n + 10a + b \\ &= 25 \cdot 4n + (10a + b) \end{aligned}$$

$25 \cdot 4n$ は 25 の倍数なので, N が 25 の倍数 $\Leftrightarrow$ $10a + b$ が 25 の倍数
ここで, $10a + b$ は下 2 桁である.

(c) $N = 1000n + 100a + 10b + c$ とする.$(0 \leqq a, b, c \leqq 9, n \geqq 0)$
N を 8 でくくる.

$$\begin{aligned} N &= 1000n + 100a + 10b + c \\ &= 8 \cdot 125n + (100a + 10b + c) \end{aligned}$$

$8 \cdot 125n$ は 8 の倍数なので, N が 8 の倍数 $\Leftrightarrow$ $100a + 10b + c$ が 8 の倍数
ここで, $100a + 10b + c$ は下 3 桁である.

（証明終）

[*28] 桁数は何でも良い. （n が 1 桁でなくて良いことに注意.）例えば, $N = 23494$ なら $n = 234, a = 9, b = 4$

A.3 11 の倍数

定理 A.3. 11 の倍数 ⇔ 交代和が 11 の倍数

N が 4 桁の整数のときの証明. $N = 1000a + 100b + 10c + d$ とする.$(0 \leqq a, b, c, d \leqq 9)$
N を 11 で (無理矢理) くくる.

$$\begin{aligned} N &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= (11 \cdot 91 - 1)a + (11 \cdot 9 + 1)b + (11 \cdot 1 - 1)c + d \\ &= 11(91a + 9b + c) + (-a + b - c + d) \end{aligned}$$

$11(91a + 9b + c)$ は 11 の倍数なので, N が 11 の倍数 ⇔ $-a + b - c + d$ が 11 の倍数
ここで, $-a + b - c + d$ は交代和である.
[N が一般の桁数のときの証明]
N の桁数 m とすると $N = a_1 + 10^1 a_2 + 10^2 a_3 + \cdots + 10^{m-1} a_m$ と表せる.$(0 \leqq a_k \leqq 9)$
ここで,

$$10 \equiv -1 \qquad (\mathrm{mod} 11)$$

より,

$$\begin{aligned} N &= a_1 + 10^1 a_2 + 10^2 a_3 + \cdots + 10^{m-1} a_m \\ &\equiv a_1 + (-1)a_2 + (-1)^2 a_3 + \cdots + (-1)^{m-1} a_m \\ &\equiv a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{m-1} a_m \end{aligned}$$

したがって, N が 11 の倍数 ⇔ N の交代和が 11 の倍数 （証明終）

入試問題を紹介する.

練習 18 (京都教育大)**.** 自然数 m の 10 進表示を $a_l a_{l-1} \cdots a_2 a_1$ (各 a_i は 0 以上 9 以下の整数) とする．$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \cdots + (-1)^{l+1} a_l$ が 11 の倍数であれば，m も 11 の倍数であることを示せ.

A.4 2^n の倍数, 5^n の倍数

定理 A.4. 任意の自然数 N について

(a) N が 2^n の倍数 $\Leftrightarrow$ N の下 n 桁が 2^n の倍数

(b) N が 5^n の倍数 $\Leftrightarrow$ N の下 n 桁が 5^n の倍数

証明. N の桁数 m とすると $N = a_1 + 10^1 a_2 + \cdots + 10^{m-1} a_m$ と表せる.$(0 \leqq a_k \leqq 9)$

$m \leqq n$ のとき,(下 n 桁は N そのものなので) 主張は自明.

$n < m$ のとき, $N = a_1 + 10^1 a_2 + \cdots + 10^{n-1} a_n + 10^n a_{n+1} + 10^{n+1} a_{n+2} + \cdots + 10^{m-1} a_m$

(a) 2^n でくくると,

$$\begin{aligned} N =& a_1 + 10^1 a_2 + \cdots + 10^{n-1} a_n \\ &+ 2^n \cdot \left(5^n a_{n+1} + 2 \cdot 5^{n+1} a_{n+2} + \cdots + 2^{m-n-1} \cdot 5^{m-1} a_m\right) \end{aligned}$$

したがって, N が 2^n の倍数 $\Leftrightarrow$ $a_1 + 10^1 a_2 + \cdots + 10^{n-1} a_n$ が 2^n の倍数 $\Leftrightarrow$ 下 n 桁が 2^n の倍数

(b) 5^n でくくると,

$$\begin{aligned} N =& a_1 + 10^1 a_2 + \cdots + 10^{n-1} a_n \\ &+ 5^n \cdot \left(2^n a_{n+1} + 5 \cdot 2^{n+1} a_{n+2} + \cdots + 5^{m-n-1} \cdot 2^{m-1} a_m\right) \end{aligned}$$

したがって, N が 5^n の倍数 $\Leftrightarrow$ $a_1 + 10^1 a_2 + \cdots + 10^{n-1} a_n$ が 5^n の倍数 $\Leftrightarrow$ 下 n 桁が 5^n の倍数

（証明終）

A.5　7 の倍数

定理 A.5. 7 の倍数 $\Leftrightarrow$ 3 桁ずつに区切った交代和が 7 の倍数

注意 A.6. 定理を書いただけでは解りにくいと思うので, 例として 78456896 が 7 の倍数かどうか判定する.

下から 3 桁ずつに区切ると 78/456/896 となる.

この交代和は $78-456+896=518=7\times 74$ となり 7 の倍数なので, 78456896 は 7 の倍数. [*29]

この定理の証明は難しいので, 桁数が 6 桁のときを示す. [*30]

例題 A.1 (成蹊大)**.** 6 桁の自然数 N がある. この 6 桁を 3 桁ごとに 2 つの数に分け, 前の数と後の数との差が 7 の倍数であるとき, この 6 桁の自然数 N が 7 の倍数であることを証明せよ.

解答 A.1. N の上 3 桁を a, 下 3 桁を b とすると,

$$\begin{aligned}N&=1000a+b\\&=(1001-1)a+b\\&=(7\times 143-1)a+b\\&=7\times 143a-(a-b)\end{aligned}$$

ここで $7\times 143a$ は 7 の倍数なので[*31]

N が 7 の倍数 $\Leftrightarrow$ $a-b$ が 7 の倍数 $\Leftrightarrow$ N を 3 桁ずつに区切った交代和が 7 の倍数

[*29] 実際 $7\times 11208128=78456896$

[*30] 一般の場合の証明も一応載せてある.

気になる人のために, N が一般の桁数のときの証明を以下に載せる.

証明. N の桁数を $3n+m$ とおく.(m は $0,1,2$ のいずれか) [*32] このとき N は

$$N = a_0 + 10^3a_1 + 10^6a_2 + \cdots + 10^{3(n-1)}a_{n-1}$$

と表せる. ただし $0 \leqq a_k \leqq 999$.

ここで

$$10^3 \equiv 1001 - 1 \equiv 7 \times 143 - 1 \equiv -1 \qquad (\mathrm{mod} 7)$$

より

$$\begin{aligned} N &= a_0 + 10^3a_1 + 10^6a_2 + \cdots + 10^{3(n-1)}a_{n-1} \\ &\equiv a_0 + (-1)a_1 + (-1)^2a_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1} \\ &\equiv a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1} \qquad (\mathrm{mod} 7) \end{aligned}$$

したがって, N が 7 の倍数 $\Leftrightarrow$ N を 3 桁ずつに区切った交代和が 7 の倍数　（証明終）

[*32] N を 3 で割ったときの商が n, あまりが m.

[*32] とても余談だが, $143 = 11 \times 13$ であることから, 13 の倍数であるかの判定も同様にできる. 証明も同様.

B 対称式

B.1 基本対称式

定義 B.1. $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の多項式のうち, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を好きなように入れ替えても, 元の式と同じになるものを対称式という.

n 個の変数 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ から, k 個の変数を選んで掛け合わせて k 次の単項式を作る. この時, k 個の変数の組み合わせを全て考えて, k 次の単項式を足し合わせてできた対称式を基本対称式といい $\sigma_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と表す.

すなわち,

$$\begin{cases} \sigma_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \sigma_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_1x_n + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \\ \sigma_3(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n \\ \qquad\qquad\cdots \\ \sigma_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1x_2x_3\cdots x_n \end{cases}$$

$\sigma_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ は, 変数 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ からなる n 変数関数である. 単に σ_k と略記することもある.

具体例に置き換えてみる. 2 個の変数 x, y のとき, [*33]

$$\begin{cases} \sigma_1(x, y) = x + y \\ \sigma_2(x, y) = xy \end{cases}$$

3 個の変数 x, y, z のとき, [*34]

$$\begin{cases} \sigma_1(x, y, z) = x + y + z \\ \sigma_2(x, y, z) = xy + yz + zx \\ \sigma_3(x, y, z) = xyz \end{cases}$$

[*33] σ_1, σ_2 は, x, y の関数.

[*34] $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ は, x, y, z の関数.

B.2 対称式の基本定理

定理 B.2 (対称式の基本定理)**.** $x_1, x_2, \cdots, x_n$ についての対称式 $f(x_1, x_2, \cdots\ x_n)$ は基本対称式 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ に関する整式 $g(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)$ として一意に表すことができる.

例えば, 文字が 2 文字のとき*35

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ \frac{y}{x} + \frac{x}{y} &= \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{xy} = \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_2}{\sigma_2} \end{aligned}$$

文字が 3 文字のとき, *36

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 \\ x^3 + y^3 + z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) + 3xyz \\ &= (x+y+z)\left\{(x+y+z)^2 - 3(xy+yz+zx)\right\} + 3xyz \\ &= \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) - 3\sigma_3 \end{aligned}$$

となり, 確かに σ の整式として表されている.

*35 $\sigma_1 = x+y, \sigma_2 = xy$

*36 $\sigma_1 = x+y+z, \sigma_2 = xy+yz+zx, \sigma_3 = xyz$

B.3 基本定理の証明の準備

定理を証明するために, 単項式・多項式に対して辞書式順序[*37] というものを定義する.

定義 B.3 (式の辞書式順序)**.** 単項式 X, Y が

$$\begin{cases} X = Ax_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n} \\ Y = Bx_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n} \end{cases}$$

と表されるとき, 以下のように辞書式順序を定める.

X は Y より<u>強い</u>(Y は X より<u>弱い</u>) $\Leftrightarrow$ 次のいずれかが成立.

- $p_1 > q_1$
- $p_1 = q_1, p_2 > q_2$

  $\cdots$
- $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \cdots, p_{n-1} = q_{n-1}, p_n > q_n$

$x_1, \cdots, x_n$ に関する多項式 f, g に対し, f が g より<u>強い</u>

$\Leftrightarrow$ f の項のうち最も強い項が g の項のうち最も強い項より強い.

[*37] この証明のための言葉. 一般的に用いられているわけではない.

B.4 基本定理の証明

証明. まずは f が基本対称式で表せることを示す.

k 次の項のみを含む対称式について示す. [*38]

対称式 $f(x_1, \cdots, x_n)$ の項のうち, 最も強い項を

$$Ax_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

とする. このとき, f は対称式ゆえ

$$p_1 \geqq p_2 \geqq \cdots \geqq p_n$$

が成立[*39]. ここで,

$$\begin{aligned} g_1(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) &= A\sigma_1^{p_1-p_2}\sigma_2^{p_2-p_3}\cdots\sigma_n^{p_n} \\ &= A\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{p_1-p_2}\left(\sum_{i,j} x_i x_j\right)^{p_2-p_3}\cdots(x_1x_2\cdots x_n)^{p_n} \end{aligned}$$

と g_1 を定めると, これは対称式で, 最も強い項は① となる.

すなわち,

$$f_1 = f(x_1, \cdots, x_n) - g_1(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$$

とすれば, f_1 は f より弱い.

次に f_1 の最強の項について同じことを考える. すなわち, f_1 の最強の項と同じ項を持つ対称式 g_2 をもってきて,

$$f_2 = f_1(x_1, \cdots, x_n) - g_2(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$$

とすれば, f_2 は f_1 より弱い.

これを繰り返すごとに, f_n は弱くなっていくので最終的に

$$\begin{aligned} f &= g_1(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) + f_1(x_1, \cdots, x_n) \\ &= g_1(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) + g_2(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) + f_2(x_1, \cdots, x_n) \\ &= g_1(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) + g_2(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) + \cdots + g_m(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \end{aligned}$$

となり, f は基本対称式のみで表せる.

次に一意性を背理法を用いて示す. f を基本対象式のみで表す式が複数ある, すなわち

$$\begin{cases} f(x_1, \cdots, x_n) = g(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = g'(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \\ g(x_1, \cdots, x_n) \neq g'(x_1, \cdots, x_n) \end{cases}$$

[*38] 例えば, 文字が 3 文字のとき $(p_1, p_2, p_3) = (1, 3, 1)$ が項としてあれば, 対称式ゆえ $(3, 1, 1)$ の項も存在.

[*39] 一般の対称式は $\displaystyle\sum_{k}$(k 次の対称式) と表すことができる

を満たす g, g' があると仮定する.

このとき,

$$h(x_1, \cdots, x_n) = g(x_1, \cdots, x_n) - g'(x_1, \cdots, x_n)$$

とおくと, 仮定より

$$\begin{cases} h(x_1, \cdots, x_n) \neq 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ h(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

を満たす.

② より, ある定数 $a_1, \cdots, a_n$ が存在して

$$h(a_1, \cdots, a_n) \neq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

このとき, 方程式

$$X^n - a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n = 0$$

の解を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とすると, 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \sigma_1(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = a_1 \\ \sigma_2(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = a_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \sigma_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = a_n \end{cases}$$

④ に代入して,

$$\begin{aligned} h\left(\sigma_1(\alpha_1, \cdots, \alpha_n), \sigma_2(\alpha_1, \cdots, \alpha_n), \cdots, \sigma_n(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\right) &\neq 0 \\ \therefore h(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) &\neq 0 \end{aligned}$$

これは③ に反する.

背理法の仮定が間違っているので, f を基本対称式で表す式は一意であることが導かれる. （証明終）

C 方程式の有理数解

定理 C.1. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,b,c,d$ は整数$, a\neq 0)$ が有理数解 $\dfrac{q}{p}$ を持つ

$\Rightarrow p$ は a の約数かつ, q は d の約数

証明. $\dfrac{q}{p}(p,q$ は互いに素$)$ は $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解だから

$$a\left(\frac{q}{p}\right)^3+b\left(\frac{q}{p}\right)^2+c\left(\frac{q}{p}\right)+d=0$$

両辺に p^3 を掛けて

$$aq^3+bpq^2+cp^2q+dp^3=0 \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ を以下のように変形する.

$$\begin{cases}-aq^3=p(bq^2+cpq+dp^2) & \cdots ① \\ -dp^3=q(aq^2+bpq+cp^2) & \cdots ②\end{cases}$$

p,q は互いに素だから,

① より $-aq^3$ は p の倍数 $\Rightarrow a$ は p の倍数 $\Rightarrow p$ は a の約数

② より $-dp^3$ は q の倍数 $\Rightarrow d$ は q の倍数 $\Rightarrow q$ は d の約数 （証明終）

更に一般の n 次方程式でも同様のことが言える.

定理 C.2. $a_nx^{\mathrm{n}}+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0($各 a_k は整数, $a_0\neq 0)$ が有理数解 $\dfrac{q}{p}$ を持つ

$\Rightarrow p$ は a_n の約数かつ, q は a_0 の約数

証明. $\dfrac{q}{p}(p,q$ は互いに素$)$ は $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解だから

$$a_n\left(\frac{q}{p}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{q}{p}\right)+a_0=0$$

両辺に p^n を掛けて

$$a_nq^n+a_{n-1}pq^{n-1}+\cdots+a_1p^{n-1}q+a_0p^n=0 \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ を以下のように変形する.

$$\begin{cases}-a_nq^n=p(a_{n-1}q^{n-1}+\cdots+a_1p^{n-2}q+a_0p^{n-1}) & \cdots ① \\ -a_0p^n=q(a_nq^{n-1}+a_{n-1}pq^{n-2}+\cdots+a_1p^{n-1}) & \cdots ②\end{cases}$$

p,q は互いに素だから,

① より $-a_nq^n$ は p の倍数 $\Rightarrow a_n$ は p の倍数 $\Rightarrow p$ は a_n の約数

② より $-a_0p^n$ は q の倍数 $\Rightarrow a_0$ は q の倍数 $\Rightarrow q$ は a_0 の約数 （証明終）

D 組立除法

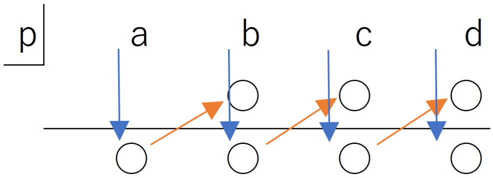
定理 D.1 (組立除法)**.** 次の操作を組立除法という.

(i) 割られる多項式の係数を左から順に書く.(係数ゼロに気をつける！)

(ii) 割る 1 次式 $x-p$ の p を左上に書く.（符号に注意！）

(iii) 左下の〇から順に計算する. 下に行くときは足し算, 右上に行くときは p 倍する.

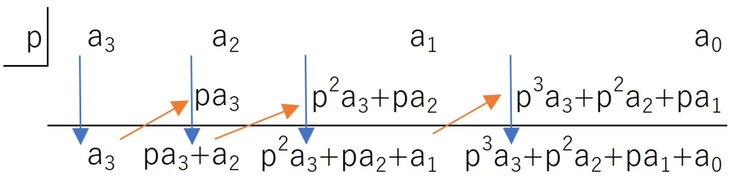
(iv) 3 行目に出てきた数字が, 商の係数と余りになる.



証明. 割られる多項式が 3 次である場合を証明する.*40

多項式を $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, 割る 1 次式を $x-p$, 割った商を $g(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$ 割った余りを r とおく.

組立除法で行っている計算を文字で行うと, 以下のようになる.



定理が成り立つこと（組立除法が正しいこと）を示すには

$$\begin{cases} b_2 &= a_3 \\ b_1 &= pa_3+a_2 \\ b_0 &= p^2a_3+pa_2+a_1 \\ r &= p^3a_3+p^2a_2+pa_1+a_0 \end{cases} \qquad \cdots(*)$$

が成り立つことを確認すれば良い. これを示す.

$f(x)$ を $x-p$ で割った商が $g(x)$, 余りが r であることを式で表すと

$$f(x)=(x-p)\cdot g(x)+r$$
$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=(x-p)(b_2x^2+b_1x+b_0)+r$$

この式を展開して

$$a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=b_2x^3+(b_1-pb_2)x^2+(b_0-pb_1)x-pb_0+r$$
$$(a_3-b_2)x^3+(a_2-b_1+pb_2)x^2+(a_1-b_0+pb_1)x+(a_0+pb_0-r)=0$$

これは x についての恒等式なので

$$\begin{cases} a_3 - b_2 & = 0 \\ a_2 - b_1 + pb_2 & = 0 \\ a_1 - b_0 + pb_1 & = 0 \\ a_0 + pb_0 - r & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_2 & = a_3 \\ b_1 & = pb_2 + a_2 = pa_3 + a_2 \\ b_0 & = pb_1 + a_1 = p(pa_3 + a_2) + a_1 = p^2a_3 + pa_2 + a_1 \\ r & = pb_0 + a_0 = p(p^2a_3 + pa_2 + a_1) + a_0 = p^3a_3 + p^2a_2 + pa_1 + a_0 \end{cases}$$

よって $(*)$ が正しいことが示された. （証明終）

[*40] 一般の n 次でも同様に証明可能.

E 合同式

定理 E.1. $\mathrm{mod}\, n$ として, $a \equiv b$, $c \equiv d$ のとき,

(1) $a + c \equiv b + d$
(2) $a - c \equiv b - d$
(3) $ac \equiv bd$
(4) $a^k \equiv b^k$ (k は自然数)

証明. 仮定 ($\mathrm{mod}\, n$ として, $a \equiv b$, $c \equiv d$) より,
$a = n\alpha + r_1, b = n\beta + r_1, c = n\gamma + r_2, d = n\delta + r_2$ $(0 \leqq r_1, r_2 < n)$

(1) 通常の計算で, あまりが同じことを示せば良い

$$\begin{aligned} a + c &= (n\alpha + r_1) + (n\gamma + r_2) = n(\alpha + \gamma) + (r_1 + r_2) \\ b + d &= (n\beta + r_1) + (n\delta + r_2) = n(\beta + \delta) + (r_1 + r_2) \end{aligned}$$

したがって $a + c \equiv r_1 + r_2 \equiv b + d$

(2) (1) と同様.

$$\begin{aligned} a - c &= (n\alpha + r_1) - (n\gamma + r_2) = n(\alpha - \gamma) + (r_1 - r_2) \\ b - d &= (n\beta + r_1) - (n\delta + r_2) = n(\beta - \delta) + (r_1 - r_2) \end{aligned}$$

したがって $a - c \equiv r_1 - r_2 \equiv b - d$

(3) (1) と同様.

$$\begin{aligned} ac &= (n\alpha + r_1)(n\gamma + r_2) = n(n\alpha\gamma + \alpha r_2 + \gamma r_1) + r_1 r_2 \\ bd &= (n\beta + r_1)(n\delta + r_2) = n(n\beta\delta + \beta r_2 + \delta r_1) + r_1 r_2 \end{aligned}$$

したがって $ac \equiv r_1 r_2 \equiv bd$

(4) 二項定理を用いれば

$$\begin{aligned} a^k = (nx + r)^k &= \sum_{l=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_l (nx)^l r^{k-l} \\ &= r^k + \underbrace{\sum_{l=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_l (nx)^l r^{k-l}}_{n\ \text{を因数に持つ項}} \\ &\equiv r^k \end{aligned}$$

b^k についても同様. したがって $a^k \equiv r^k \equiv b^k$

（証明終）

「割り算で合同になるための条件」は次のように書ける.

命題 E.2. $ac \equiv bc \pmod{n}$ のとき, G を n, c の最大公約数として

$$a \equiv b \left(\mathrm{mod}\,\frac{n}{G}\right)$$

証明. 仮定 (mod$n$ として, $ac \equiv bc$) より, $ac = n\alpha + r, bc = n\beta + r$ $(0 \leqq r < n)$

また, n と c の最大公約数が G ゆえ, n', c' を互いに素な整数として

$$n = Gn', c = Gc'$$

が成立.

ここで, $ac - bc$ を 2 通りに計算してみる.

$$\begin{aligned} ac - bc &= (a-b)c = (a-b)Gc' \\ ac - bc &= (n\alpha + r) - (n\beta + r) = n(\alpha - \beta) = Gn'(\alpha - \beta) \\ \therefore (a-b)Gc' &= Gn'(\alpha - \beta) \\ \therefore (a-b)c' &= n'(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

右辺は n' の倍数であるから, 左辺も n' の倍数. いま, n' と c' は互いに素であるから, $a - b$ は n' の倍数である. すなわち,

$$\begin{aligned} a - b &\equiv 0 \pmod{n'} \\ \therefore a &\equiv b \pmod{n'} \\ \therefore a &\equiv b \left(\mathrm{mod}\,\frac{n}{G}\right) \end{aligned}$$

（証明終）

この命題からすぐに次の定理が従う.

定理 E.3. mod$n$ として $ac \equiv bc$ のとき, n, c が互いに素なら

$$a \equiv b$$

すなわち, 法とする数と割る数が互いに素なら, 割り算をしても合同という性質は保たれる.

証明. 上の命題で $G = 1$ とすれば n, c の最大公約数は 1 となり, n, c は互いに素.

命題より $ac \equiv bc \pmod{n}$ のとき, $a \equiv b \pmod{n}$ （証明終）

第 IV 部

高校数学公式集

凡例

★... 絶対覚える必要があるもの.
（無印）覚える必要があるもの.
♯... 余裕があれば覚えたほうがいいもの.
↬ ... 変形の手順を覚えるべきもの.
♠... 数学 III の内容を含む項目.

1　数と式

公式 1.1 (★ 乗法公式)**.** すべて複号同順.

$$\begin{aligned}
&acx^2+(ad+bc)x+bd\\
&\quad=(ax+b)(cx+d)\ \text{（たすき掛け）}\\
&a^2-b^2=(a-b)(a+b)\\
&a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2\\
&a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\\
&\quad=(a+b+c)^2\\
&a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3\\
&a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)\\
&a^3+b^3+c^3-3abc\\
&\quad=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)
\end{aligned}$$

公式 1.2 (二重根号)**.** $a,b\geqq 0$（←重要！）に対し

$$\sqrt{(a+b)\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$$

公式 1.3 (★ 二項定理)**.**

$$\begin{aligned}
&(a+b)^n\\
=&{}_n\mathrm{C}_0a^n+{}_n\mathrm{C}_1a^{n-1}b+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nb^n\\
=&\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_ka^kb^{n-k}
\end{aligned}$$

定理 1.4 (剰余の定理, 因数定理)**.** 整式: 多項式 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ のこと.

剰余の定理　整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-a$ で割ったときの余りは $P(a)$

因数定理　1 次式 $x-a$ が整式 $P(x)$ の因数である $\Leftrightarrow P(a)=0$

2　2 次関数

公式 2.1 (↬ 平方完成)**.** 2 次関数の頂点 (p,q), 軸 $x=p$ を求める変形.

$$y=ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q(a\neq 0)$$

公式 2.2 (★2 次方程式の解の公式)**.** 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$ax^2+2b'x+c=0$ のとき,（すなわち, $b'=\frac{b}{2}$）

$$x=\frac{-b'\pm\sqrt{(b')^2-ac}}{a}$$

定義 2.3 (★2 次方程式の判別式)**.** $ax^2+bx+c=0$ の判別式は

$$D=b^2-4ac$$

$ax^2+2b'x+c=0$ のとき,（すなわち, $b'=\frac{b}{2}$）

$$\frac{D}{4}=\left(b'\right)^2-ac$$

※ 記述で使う際には 「判別式を D として〜」と記述する.（D とは何かを説明してから使う.）

3　図形と方程式

公式 3.1 (★2 点間の距離)**.** (x_1,y_1) と (x_2,y_2) の間の距離

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

公式 3.2 (★ 内分点, 外分点)**.** (x_1,y_1) と (x_2,y_2) を $m:n$ に内分する点

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$$

(x_1,y_1) と (x_2,y_2) を $m:n$ に外分する点

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

公式 3.3 (★ 重心)**.** $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$, $\mathrm{C}(x_3, y_3)$ のとき三角形 ABC の重心 G は

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

命題 3.4 (2 直線の平行, 垂直)**.** 2 つの直線の傾きを m, n とする.

$$2\text{ 直線が平行} \Leftrightarrow m = n$$
$$2\text{ 直線が垂直} \Leftrightarrow mn = -1$$

公式 3.5 (★ 点と直線の距離)**.** 点 (x_1, y_1) と $ax + by + c = 0$ の距離 d は

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

公式 3.6 (★ 円の方程式)**.** 一般形

$$x^2 + y^2 + \ell x + my + n = 0$$

中心が原点, 半径 r の円の方程式

$$x^2 + y^2 = r^2$$

中心が (a, b) , 半径 r の円の方程式

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

公式 3.7 (円の接線)**.** 中心が原点の円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

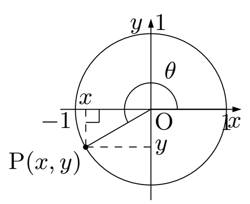
4 三角関数

定義 4.1 (★ 弧度法)**.** l: 弧の長さ, r: 半径, θ: 中心角（ラジアン）

$$l = r\theta$$

定義 4.2 (★ 三角関数)**.** 座標平面上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ に対し, $\mathrm{OP} = 1$, x 軸の正の方向と OP のなす角を θ とする. このとき,

$$\sin\theta = y$$
$$\cos\theta = x$$
$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



公式 4.3 (★ 三角関数の相互関係)**.** 次が成立.

(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(2) $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(3) $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

公式 4.4 ($\hookrightarrow$ 三角関数の値)**.** n は整数.

$$\begin{aligned}
\sin(\theta + 2n\pi) &= \sin\theta & \sin(-\theta) &= -\sin\theta \\
\cos(\theta + 2n\pi) &= \cos\theta & \cos(-\theta) &= \cos\theta \\
\tan(\theta + n\pi) &= \tan\theta & \tan(-\theta) &= -\tan\theta \\
\sin(\pi + \theta) &= -\sin\theta & \sin(\pi - \theta) &= \sin\theta \\
\cos(\pi + \theta) &= -\cos\theta & \cos(\pi - \theta) &= -\cos\theta \\
\tan(\pi + \theta) &= \tan\theta & \tan(\pi - \theta) &= -\tan\theta \\
\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= \cos\theta & \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \cos\theta \\
\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\sin\theta & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \sin\theta \\
\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) &= -\frac{1}{\tan\theta} & \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) &= \frac{1}{\tan\theta}
\end{aligned}$$

定理 4.5 (★ 正弦定理)**.** $\triangle$ABC の外接円半径 R として,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

定理 4.6 (★ 余弦定理)**.** $\triangle$ABC に対して,

$$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2bc\cos A$$
$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}}$$

定理 4.7 (★ 加法定理)**.** すべて複号同順.

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}$$

公式 4.8 (2 倍角の公式)**.**

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= 1 - 2\sin^2\alpha \\
&= 2\cos^2\alpha - 1 \\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}
\end{aligned}$$

公式 4.9 (♯ 3 倍角の公式)**.**

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

公式 4.10 (半角の公式)**.**

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

公式 4.11 (♯ 積和・和積の公式)**.** 積和の公式

$$\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta =& \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}\\ \cos\alpha\sin\beta =& \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}\\ \cos\alpha\cos\beta =& \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}\\ \sin\alpha\sin\beta =& -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}\end{aligned}$$

和積の公式

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B =& 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\ \sin A-\sin B =& 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\\ \cos A+\cos B =& 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\ \cos A-\cos B =& -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

公式 4.12 (↬ 合成)**.**

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

ただし $\sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

5 指数関数・対数関数

定義 5.1 (累乗根/n 乗根)**.** n 乗して a になる数を a の n 乗根 $\sqrt[n]{a}$ という.

定義 5.2 (★ 指数の拡張)**.**

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^0 = 1, a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

命題 5.3 (★ 指数法則)**.**

$$a^r a^s = a^{r+s}, (a^r)^s = a^{rs}, (ab)^r = a^r b^r$$

定義 5.4 (★ 対数)**.**

$$\log_a M = p \Leftrightarrow a^p = M$$

命題 5.5 (★ 対数の性質)**.**

$$\begin{aligned}\log_a MN &= \log_a M + \log_a N\\ \log_a \frac{M}{N} &= \log_a M - \log_a N\\ \log_a M^k &= k\log_a M\\ a^{\log_a M} &= M\end{aligned}$$

公式 5.6 (★ 底の変換公式)**.** $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

命題 5.7 (常用対数)**.** a, b を正の整数とする.

(1) N は k 桁 $\Leftrightarrow k-1 \leqq \log N < k$

(2) x は小数第 a 位にはじめて 0 でない数が現れる $\Leftrightarrow -a \leqq \log x < -a+1$

6 集合と命題

定義 6.1 (★ 集合の用語)**.** 集合 A, B に対し,

- a は集合 A の要素 ： $a \in A$
- a は集合 A の要素でない ： $a \notin A$
- 集合 A は集合 B に含まれる：$A \subset B$
- 空集合（要素のない集合） ： $\phi, \emptyset$
- A の補集合 ： $\overline{A}$
- A と B の和集合（または） ： $A \cup B$
- A と B の共通部分（かつ） ： $A \cap B$

定理 6.2 (ド・モルガンの法則)**.** A, B: 集合

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

公式 6.3 (共通部分の要素数)**.** A, B, C: 集合

1. $n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
2. $n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$
$-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

7 場合の数・確率

定義 7.1 (★ 計算)**.** 0 以上の整数に対し,

階乗 $n! = n\times(n-1)\times\cdots\times 1$

順列 ${}_n\mathrm{P}_k = \frac{n!}{(n-k)!}$

組合せ ${}_n\mathrm{C}_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

※ $0! = 1, {}_n\mathrm{P}_0 = 1, {}_n\mathrm{C}_0 = 1$

公式 7.2 (★ 様々な場合の数). 順列について

- 円順列 $(n-1)!$
- じゅず順列 $\dfrac{(n-1)!}{2}$
- 同じものを含む順列 $\dfrac{n!}{p!q!r!\cdots}$
  ただし $p+q+r+\cdots=n$

公式 7.3 (★ 反復試行). n 回中 r 回だけ確率 p の事象が起こる確率は

$$ {}_n\mathrm{C}_r p^r (1-p)^{n-r} $$

定義 7.4 (★ 条件付き確率). A がすでに起こっているもとで, B が起こる確率を A が起きたときの B の**条件付き確率**といい, $P_A(B)$ とかく.

$$ P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} $$

8 データと分析

定義 8.1 (★ 四分位数). データを大きさの順に並べたとき, 4 等分する位置にある 3 つの数. 小さい順に**第 1 四分位数** Q_1, **第 2 四分位数** Q_2（= 中央値）, **第 3 四分位数** Q_3 という.

$$ \text{四分位範囲} = Q_3 - Q_1 $$
$$ \text{四分位偏差} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} $$

定義 8.2 (★ 代表値). データ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対し

$$ \text{平均} : \overline{x} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k $$
$$ \text{分散} : s_x^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + \cdots + (x_n - \overline{x})^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})^2 $$
$$ \text{標準偏差} : s_x = \sqrt{\text{分散}} $$

定義 8.3 (★ 相関係数). 2 種類のデータの組 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ に対し, **共分散** s_{xy}, **相関係数** r は

$$ s_{xy} = \frac{(x_1 - \overline{x})(y_1 - \overline{y}) + \cdots + (x_n - \overline{x})(y_n - \overline{y})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y}) $$
$$ r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \leftarrow \frac{(x \text{ と } y \text{ の共分散})}{(x \text{ の標準偏差}) \times (y \text{ の標準偏差})} $$

命題 8.4 (★ 相関係数の性質). 相関係数 r について,

(1) r は $-1 \leqq r \leqq 1$ の値を取る.
(2) r が 1 に近いとき, 正の相関がある.
(3) r が -1 に近いとき, 負の相関がある.
(4) r が 0 に近いとき, 相関なし.

公式 8.5 (分散, 共分散の計算). 分散・共分散の計算は次でもできる.

$$ s_x^2 = \frac{1}{n}(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - \overline{x}^2 $$
$$ \text{分散} = (2\text{ 乗の平均}) - (\text{平均})^2 $$
$$ s_{xy} = \frac{1}{n}(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) - \overline{x}\cdot\overline{y} $$
$$ \text{共分散} = (xy \text{ の平均}) - (x \text{ の平均})(y \text{ の平均}) $$

9 図形

定理 9.1 (★ 三平方の定理/ピタゴラスの定理). 直角三角形 ABC の斜辺の長さ c, 他の辺の長さを a, b として

$$ a^2 + b^2 = c^2 $$

定理 9.2 (★ 正弦定理). R は $\triangle$ABC の外接円半径

$$ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R $$

定理 9.3 (★ 余弦定理). $\triangle$ABC に対して,

$$ \mathrm{BC}^2 = \mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cdot\cos A $$
$$ \Leftrightarrow \cos A = \frac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} $$

定理 9.4 (★ 三角形の面積). $S = \frac{1}{2}bc\sin A$

定理 9.5 (ヘロンの公式). 三角形の辺を a, b, c, また $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ として, 面積は

$$ S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} $$

定理 9.6 (三角不等式). 三角形の 3 辺の長さが a, b, c のとき,

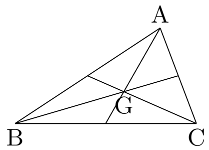
$$ \begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases} $$

$\Leftrightarrow |a-b| < c < a+b$

定理 9.7 (重心)**.** △ABC の 3 つの中線の交点を重心という.

(1) 重心は各中線を 2 : 1 に内分する.

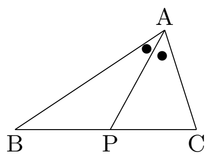
(2) 3 つの中線によってできる 6 つの小三角形の面積は全て等しく, その大きさは全体の 6 分の 1.



定理 9.8 (★ 角の二等分線の定理)**.** △ABC において,

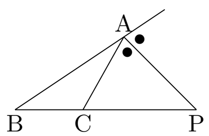
(1)∠A の内角の 2 等分線と辺 BC の交点を P とする.

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BP} : \mathrm{CP}$$



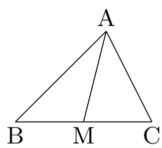
(2) ∠A の外角の 2 等分線と直線 BC の交点を P とする.

$$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \mathrm{BP} : \mathrm{CP}$$



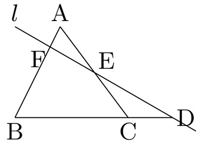
定理 9.9 (中線定理)**.** △ABC において, 辺 BC の中点を M とする.

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AM}^2 + \mathrm{BM}^2)$$



定理 9.10 (★ メネラウスの定理)**.** △ABC に対し,

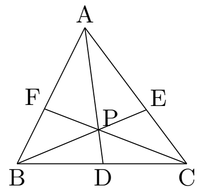
直線 l と直線 BC, CA, AB の交点をそれぞれ D, E, F とする.



$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} \cdot \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} = 1$$

逆に点 D, E, F が上の等式を満たせば, D, E, F は同一直線上.

定理 9.11 (★ チェバの定理)**.** △ABC に対し, ある点 P をとり, AP と BC, BP と CA, CP と AB の交点をそれぞれ D, E, F とする.

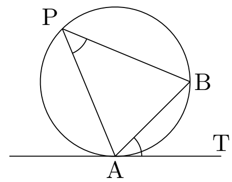


$$\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} \cdot \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{EA}} \cdot \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} = 1$$

逆に点 D, E, F が上の等式を満たせば, 直線 AD, BE, CF は 1 点で交わるか, 平行である.

定理 9.12 (★ 接弦定理)**.** 図のような, 円の接線 AT と内接三角形 ABT に対し

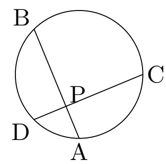
$$\angle\mathrm{BAT} = \angle\mathrm{APB}$$



定理 9.13 (★ 方べきの定理)**.** 以下をすべて方べきの定理という.

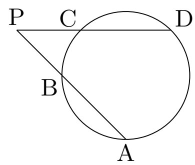
(1) 円の弦 AC, BD が円内で交わるとき

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$$



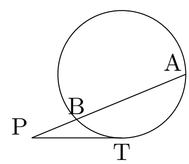
(2) 円の弦 AC, BD が円外で交わるとき

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$$



(3) 円の弦 AB と, 接点 T での接線が交わるとき

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$$



定理 9.14 (♯ オイラーの多面体定理)**.** 多面体の頂点数 v, 辺の数 e, 面の数 f として,

$$v - e + f = 2$$

10 ベクトル

※特に断りがないものは, 平面でも空間でも用いることができる.

公式 10.1 (★ ベクトルの引き算)**.**

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

公式 10.2 (★ ベクトルの大きさ)**.** 次が成立.

(1) 平面ベクトル $\vec{x}=(x_1,x_2)$ に対し,

$$|\vec{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

(2) 空間ベクトル $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$ に対し,

$$|\vec{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

公式 10.3 (★ ベクトルの内積)**.** (1) は定義.

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ として,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$\Leftrightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

(3) 平面ベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$
$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

(4) 空間ベクトル $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ に対し,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$
$$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

命題 10.4 (★ ベクトルの並行・垂直)**.** 次が成立.

(1) $\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=k\vec{a}$ を満たす実数 k が存在.

(2) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{\mathrm{a}}\cdot\vec{\mathrm{b}}=0$

命題 10.5 (1 次独立)**.** 平面において,

(1) 2 つのベクトル $\vec{a},\vec{b}$ は $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ のとき 1 **次独立**という. (定義)

(2) $\vec{a},\vec{b}$ が 1 次独立なら, 平面上のすべてのベクトルは, 実数 m,n を用いて $m\vec{a}+n\vec{b}$ の形でただ 1 通りに表される.

※空間でも 1 次独立性を考えることができる.

公式 10.6 (三角形の面積)**.** $\triangle$OAB で, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする. $\triangle$OAB の面積 S は,

(1) $S=\dfrac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

(2) (平面ベクトル) $\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$ のとき,

$$S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

公式 10.7 (★ 位置ベクトル)**.** A, B, C の位置ベクトルを $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ とする.

(1) 線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトルは

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

(2) 線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトルは

$$\vec{q}=\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

(3) 三角形 ABC の重心 G の位置ベクトルは

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

公式 10.8 (ベクトル方程式)**.** A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$ とする.

(1) 直線 AB のベクトル方程式

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

※ $0\leqq t\leqq 1$ なら P は線分 AB 上.

(2) A を通り, 方向ベクトル $\vec{d}$ の直線

$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$$

(3) A を通り, $\vec{n}$(法線ベクトル) に垂直な直線

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$$

(4) 点 C$(\vec{c})$ を中心とする半径 r の円（球）

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$$

(5) A, B を直径の両端とする円（球）

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$

11 整数

定義 11.1 (★ 互いに素)**.** 整数 a,b の最大公約数が 1 のとき, a と b は**互いに素**であるという.

公式 11.2 (★ 約数の個数と総和)**.** 自然数 N を素因数分解したものが $N=p^aq^br^c\cdots$ とする.

(1) 約数の個数は $(a+1)(b+1)(c+1)\cdots$

(2) 約数の総和は

$$\begin{aligned}&(1+p+p^2+\cdots+p^a)\\ &\times(1+q+q^2+\cdots+q^b)\\ &\times(1+r+r^2+\cdots+r^c)\cdots\end{aligned}$$

※等比数列の和の公式を用いれば

$$\frac{p^{a+1}-1}{p-1}\cdot\frac{q^{b+1}-1}{q-1}\cdot\frac{r^{c+1}-1}{r-1}\cdots$$

定理 11.3 (★ 最大公約数・最小公倍数の関係)**.** 2 つの整数 a, b の最小公倍数 L, 最大公約数 G として $ab = GL$

定理 11.4 (★ ユークリッドの互除法)**.** 自然数 a, b に対し, a を b で割ったあまりを r とすると

a と b の最大公約数 $=$ b と r の最大公約数

定義 11.5 (n 進法)**.** (1)n 進法で表された数 $N = a_m a_{m-1}\cdots a_1 a_0$($m+1$ 桁) を 10 進法にすると

$$N = a_m\cdot n^m + a_{m-1}\cdot n^{m-1}+\cdots+a_1\cdot n^1 + a_0$$

(2)n 進法で表された小数 $x = 0.a_1a_2\cdots a_m$(小数第 m 位まで) を 10 進法にすると

$$x = a_1\cdot n^{-1}+a_2\cdot n^{-2}+\cdots+a_m\cdot n^{-m}$$

公式 11.6 (n 進法の変換)**.** 10 進法で表された数 13.4375 を 2 進法で表す.

整数部分：

$$\begin{array}{r|rcl} 2 & 13 & & \\ \hline 2 & 6 & \cdots & 1 \\ \hline 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \hline 2 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline & 0 & \cdots & 1 \end{array}$$

小数部分：

$$\begin{array}{r|r} & .4375 \\ \times & 2 \\ \hline & \underline{0}|.8750 \\ \times & 2 \\ \hline & \underline{1}|.7500 \\ \times & 2 \\ \hline & \underline{1}|.5000 \\ \times & 2 \\ \hline & \underline{1}|.0 \end{array}$$

となるから, 答えは $1101.0111_{(2)}$

10 進法で表された数 13.4375 を 5 進法で表す.

整数部分：

$$\begin{array}{r|rcl} 5 & 13 & & \\ \hline 5 & 2 & \cdots & 3 \\ \hline & 0 & \cdots & 2 \end{array}$$

小数部分：

$$\begin{array}{r|r} & .4375 \\ \times & 5 \\ \hline & \underline{2}|.1875 \\ \times & 5 \\ \hline & \underline{0}|.9375 \\ \times & 5 \\ \hline & \underline{4}|.6875 \\ \times & 5 \\ \hline & \underline{3}|.4375\bullet \end{array}$$

となるから, 答えは $23.\dot{2}04\dot{3}_{(5)}$

12 数列

公式 12.1 (★ 等差数列)**.** 等差数列について,

(1) 初項 a, 公差 d の等差数列の一般項は

$$a_n = a+(n-1)d$$

(2) 等差数列の第 n 項までの和は

$$S_n = \frac{n(\text{初項}+\text{末項})}{2}$$

(3) 漸化式は $a_{n+1} = a_n + d$

公式 12.2 (★ 等比数列)**.** 等比数列について,

(1) 初項 a, 公比 r の等比数列の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

(2) 等比数列の第 n 項までの和は

$$(r\neq 1)S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$
$$(r=1)S_n = na$$

(3) 漸化式は $a_{n+1} = ra_n$

公式 12.3 (★$\sum$ の計算)**.** (1) は定義.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(pa_k + qb_k) = p\sum_{k=1}^{n} a_k + q\sum_{k=1}^{n} b_k$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^k = \frac{a(1-r^n)}{1-r}(r \neq 1)$

公式 12.4 (★ 階差数列)**.** 階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ について,

(1) 一般項は,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k (n \geqq 2)$$

※ $n = 1$ のときには不成立なので, 個別に確認する必要がある.

(2) 漸化式は $a_{n+1} = a_n + b_n$

公式 12.5 (♤2 項間漸化式の解き方)**.** 漸化式 $a_{n+1} = pa_n + q$ に対し,

$$a_{n+1}, a_n \to \alpha$$

と置き換えて α の方程式を解く. 得られた α を用いるともとの漸化式は

$$a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$$

となり, $\{a_n - \alpha\}$ は等比数列.

公式 12.6 (♤3 項間漸化式の解き方)**.** 漸化式 $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ に対し,

$$a_{n+2} \to x^2, a_{n+1} \to x, a_n \to 1$$

に置き換えた 2 次方程式の解を α, β とする.

(1) $\alpha \neq \beta$ なら

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta\left(a_{n+1} - \alpha a_n\right) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha\left(a_{n+1} - \beta a_n\right) \end{cases}$$

$\{a_{n+2} - \alpha a_{n+1}\}, \{a_{n+2} - \beta a_{n+1}\}$ がそれぞれ等比数列となることから, 一般項が得られる.

(2) $\alpha = \beta$ なら

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \alpha\left(a_{n+1} - \alpha a_n\right)$$

$\{a_{n+2} - \alpha a_{n+1}\}$ は等比数列であり, その一般項は

$$a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\alpha^{n-1}$$

両辺を α^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{a_n}{\alpha^n} = \frac{a_2 - \alpha a_1}{\alpha^2}$$

となり, $\left\{\dfrac{a_n}{\alpha^n}\right\}$ は等比数列となる.

13 関数

公式 13.1 (平行移動)**.** $y = f(x)$ を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動したものは,

$$y - q = f(x - p)$$

定義 13.2 (偶関数・奇関数)**.** $f(x)$: 関数

(1) **偶関数** $f(-x) = f(x)$

(2) **奇関数** $f(-x) = -f(x)$

14 微分

定義 14.1 (♠ 連続, 微分可能)**.** (1) $f(x)$ が $x = a$ で**連続**

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

(2) $f(x)$ が $x = a$ で**微分可能**

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

※不連続・微分不可能なときは, 極限の値が存在しない or 上の等式が成立しない.

命題 14.2 (♠ 連続と微分可能)**.** (1) $f(x)$ が $x = a$ で微分可能ならば連続.

(2) $f(x)$ が $x = a$ で連続でも, 微分可能**とは限らない**. ※反例:$f(x) = |x|$ は $x = 0$ で連続だが微分不可能.

定義 14.3 (微分係数・導関数)**.** $f(x)$ の $x=a$ での微分係数は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$f(x)$ の導関数は

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

公式 14.4 (導関数の性質)**.** $f(x), g(x)$ は微分可能.

$$\{kf(x)+lg(x)\}'=kf'(x)+lg'(x)$$

公式 14.5 (♠ 導関数の計算)**.**

積 $\{f(x)g(x)\}'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$

逆数 $\left\{\dfrac{1}{f(x)}\right\}'=-\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

商 $\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f(x)g'(x)-f'(x)g(x)}{\{f(x)\}^2}$

合成関数 $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

公式 14.6 (♠ 基本的な導関数)**.** α : 実数, $a>0$.

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1} \qquad (e^x)'=e^x$$
$$(\sin x)'=\cos x \qquad (a^x)'=a^x\cdot\log a$$
$$(\cos x)'=-\sin x \qquad (\log x)'=\frac{1}{x}$$
$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\log|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)} \qquad \left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

公式 14.7 (接線・法線の方程式)**.** $y=f(x)$ の $(a, f(a))$ における

(1) 接線の方程式は $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

(2) 法線の方程式は $y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$

定理 14.8 (♠ 平均値の定理)**.** $f(x)$ が $[a,b]$ で連続, (a,b) で微分可能のとき, （←仮定が重要！）

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c), \quad a<c<b$$

を満たす c が存在.

定理 14.9 (♠,♯ ロピタルの定理)**.** （仮定がとても重要！）

$f(x), g(x)$ は (a,b) で微分可能.

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\lim_{x\to a+0}g(x)=0,$$
$$g(a)\neq 0, g'(a)\neq 0$$

をみたすとする.

このとき, $\displaystyle\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在すれば,

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

※ 記述では使用は非推奨. 検算に使う程度に留めるほうが良い.

15 積分

公式 15.1 (不定積分の性質)**.**

$$\int\{kf(x)+lg(x)\}\,\mathrm{d}x=k\int f(x)\,\mathrm{d}x+l\int g(x)\,\mathrm{d}x$$

公式 15.2 (♠ x^α の不定積分)**.** C は積分定数.

$$\int x^\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C(\alpha\neq 1)$$
$$\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\log|x|+C$$

公式 15.3 (♠ 基本の不定積分)**.** C は積分定数.

$$\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$$
$$\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$$
$$\int\frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\tan x+C$$
$$\int\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{\tan x}+C$$
$$\int e^x\,\mathrm{d}x=e^x+C$$
$$\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\log a}+C$$
$$\int\log x\,\mathrm{d}x=x\log x-x+C$$

公式 15.4 (♠,↬ 置換積分)**.**

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f(g(t))\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t$$

よく使う公式として

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \log|f(x)| + C$$
$$\int \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{f(x)} + C$$

さらに, つぎの置換はよく用いられる.

(1) $\sqrt{a^2-x^2}$ を含む $\to x = a\sin\theta$ と置換
(2) $\frac{1}{x^2+a^2}$ を含む $\to x = a\tan\theta$ と置換

公式 15.5 (♠ 部分積分法)**.**

$$\int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

公式 15.6 (偶関数・奇関数の定積分)**.** 次が成立.

(1) $f(x)$ が偶関数なら
$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$
(2) $f(x)$ が奇関数なら $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

公式 15.7 ($\frac{1}{6}$ 公式)**.**

$$\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,\mathrm{d}x = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$

公式 15.8 (♠ 定積分と導関数)**.** a は定数.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x)$$

公式 15.9 (♠ 定積分と不等式)**.** 区間 $[a,b]$ で,

(1) $f(x) \leqq g(x)$ なら

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

(2) $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$

定理 15.10 (♠,♯ 積分の平均値の定理)**.** $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続ならば

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c), \quad a < c < b$$

を満たす c が存在.

公式 15.11 (♠ 区分求積法)**.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

公式 15.12 (♠ 断面積がわかるときの体積)**.** 断面積 $S(x)$ として

$$V = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$$

公式 15.13 (♠ 回転体体積)**.** 次が成立.

(1) x 軸周りの回転体体積

$$V = \pi\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,\mathrm{d}x$$

(2) x 軸周り, 2 曲線間の回転体体積

$$V = \pi\int_a^b \left[\{f(x)\}^2 - \{g(x)\}^2\right]\mathrm{d}x$$

(3) y 軸周りの回転体体積

$$V = \pi\int_{f(a)}^{f(b)} x^2\,\mathrm{d}y = \pi\int_{f(a)}^{f(b)} \{g(y)\}^2\,\mathrm{d}y$$

公式 15.14 (♠ 曲線の長さ)**.** 次が成立.

(1) 曲線 $y = f(x)(a \leqq x \leqq b)$ の長さ L として

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}t$$

(2) 曲線 $x = f(t), y = g(t)(\alpha \leqq t \leqq \beta)$ の長さ L として

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$