1　問題

とても有名な大学入試問題がある.

問題（京都）

$\tan 1^\circ$ は有理数か.

問題文の簡潔さが有名であり, 証明自体は背理法と加法定理を組み合わせることで証明できる.

この問題を一般化してみる.

問題 A.

$\cos\theta, \sin\theta, \tan\theta$ が有理数となる条件をそれぞれ求めよ.

私はこの問題をまだ解けていないので, 少し条件を追加した次の問題を, 今回は解く.

問題 B.

有理数 p に対して,$\cos p\pi, \sin p\pi, \tan p\pi$ が有理数となる条件をそれぞれ求めよ.

これは次のように言い換えても良い.

問題 B$'$.

有理数 q に対して,$\cos q^\circ, \sin q^\circ, \tan q^\circ$ が有理数となる条件をそれぞれ求めよ.

2　問題を解くための準備

以下の 4 つの補題を, 後の証明で用いる.

補題 1. チェビシェフ多項式

$\cos k\theta$ は $\cos\theta$ の多項式として表せる.
とくに,$\cos\theta = x$ とおくと x の多項式 $T_k(x)$ を用いて $\cos k\theta = T_k(x)$ と表わせ,

$$T_k(x) = \begin{cases} x & (k=1) \\ 2x^2-1 & (k=2) \\ 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x) & (k \geqq 3) \end{cases}$$

補題 2. チェビシェフ多項式の性質

(i) $T_k(x)$ の次数は k で, 最高次の係数は 2^{k-1} である.
(ii) $T_k(x)$ のすべての係数は整数である.
(iii) T_{2k-1} の定数項は 0, T_{2k} の定数項は $(-1)^k$ である.

以上 2 つの証明は次の記事に載っている. `http://falmath.starfree.jp/blogs/chebyshev.html`

補題 3.

自然数 m と n が互いに素ならば, $ma = nb + 1$ を満たすような自然数 $a,\ b$ が存在する.

[証明] まず, $m,\ 2m,\ \cdots,\ nm$ のそれぞれを n で割った余りがすべて異なることを示す.

余りが等しくなる 2 数 $sm,\ tm(1 \leqq s < t \leqq n)$ が存在したとすると $(t-s)m$ は n の倍数. m と n は互いに素なので, $(t-s)$ は n の倍数, すなわち n で割り切れる. これは $0 < t-s < n$ に矛盾.

よって, n 個の数 $m,\ 2m,\ \cdots,\ nm$ のうち n で割った余りが 1 のものが唯一つあるので, それを am とすれば $ma = nb + 1$ を満たす. ■

補題 4.

$a_n x^{\mathrm{n}} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ (各 a_k は整数, $a_0 \neq 0$) が有理数解 $\dfrac{q}{p}$ を持つ
$\Rightarrow p$ は a_n の約数かつ, q は a_0 の約数

証明は次の記事に載っている. `http://falmath.starfree.jp/blogs/yurisukai.html`

3　$\cos p\pi$ が有理数となる必要十分条件

定理 1.$\cos p\pi$ が有理数となる必要十分条件

互いに素である自然数 n と整数 m に対し, 以下の条件は同値.

(1) $\cos \frac{m}{n}\pi$ が有理数

(2) $n = 1,\ 2,\ 3$

注意:普通, 有理数といえば互いに素な整数 $a,\ b(a \neq 0)$ に対し $\frac{b}{a}$ と表せる数のことであるが, 分母を正に限定しても（分子を負にすれば負の数も表現できるので）問題ない.

[証明] (2)⇒(1) を示す.

$$\begin{aligned}\cos m\pi &= (-1)^m \\ \cos \frac{m\pi}{2} &= 0 \ (m \text{ は } 2 \text{ で割り切れない}) \\ \cos \frac{m\pi}{3} &= \pm\frac{1}{2} \ (m \text{ は } 3 \text{ で割り切れない})\end{aligned}$$

となりそれぞれ有理数である.

(1)⇒(2) を示す.

補題 1 より, $\cos\theta$ が有理数 ⇒$\cos k\theta$ が有理数（k は自然数.）

これと補題 3 を用いることで, つぎの関係を得る.

$$\begin{aligned}\cos \frac{m}{n}\pi \text{ が有理数} &\Rightarrow \cos \frac{ma}{n}\pi \text{ が有理数} \\ &\Rightarrow \cos \frac{nb+1}{n}\pi \text{ が有理数} \\ &\Rightarrow \cos \left(b\pi + \frac{\pi}{n}\right) \text{ が有理数} \\ &\Rightarrow (-1)^b \cos \frac{\pi}{n} \text{ が有理数}\end{aligned}$$

すなわち, 仮定より $\cos \frac{\pi}{n}$ は有理数.

(i) $n \geqq 5$ である奇数のとき

$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ と定めたので,

$$T_n\left(\cos \frac{\pi}{n}\right) = \cos\left(n \cdot \frac{\pi}{n}\right) = -1$$

また, 補題 2 より n が奇数のときは $T_n(x)$ は次のように表せる.

$$\begin{aligned}T_n(x) &= 2^{n-1}x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x \\ T_n\left(\cos \frac{\pi}{n}\right) &= 2^{n-1}\cos^n \frac{\pi}{n} + a_1 \cos^{n-1} \frac{\pi}{n} + \cdots + a_{n-1}\cos \frac{\pi}{n}\end{aligned}$$

したがって

$$2^{n-1}\cos^n\frac{\pi}{n}+a_1\cos^{n-1}\frac{\pi}{n}+\cdots+a_{n-1}\cos\frac{\pi}{n}+1=0$$

いま, 仮定より $\cos\frac{\pi}{n}$ は有理数なので, 方程式

$$2^{n-1}x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+1=0$$

は（$\cos\frac{\pi}{n}$ という）有理数解を持つ. 補題 4 より,

$$\cos\frac{\pi}{n}=\pm\frac{\text{定数項の約数}}{\text{最高次の係数の約数}}=\pm\frac{1}{2^k}\quad(k=0,1,\cdots,n-1)$$

$k=0$ のとき, $\cos\frac{\pi}{n}=1$ となる. すなわち,$\frac{\pi}{n}$ が 2π の整数倍となればよいが, 場合分けの際の仮定より $n\geqq 5$ であるため不適.
$k=1,\cdots,n-1$ のとき,

$$\cos\frac{\pi}{n}=\frac{1}{2^k}\leqq\frac{1}{2}$$

であるが, 場合分けの際の仮定より $n\geqq 5$ であるため,

$$\cos\frac{\pi}{n}>\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

より不適.

よって,$n\geqq 5$ である奇数のときは矛盾.

(ii) n が 4 の倍数のとき
仮定より自然数 l を用いて $n=4l$ と表せる. $\cos\frac{\pi}{n}=\cos\frac{\pi}{4l}$ が有理数と仮定すると, 補題 1 より $\cos\left(l\cdot\frac{\pi}{n}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ も有理数. これは矛盾.

(iii) n が 10 以上かつ,4 で割ると 2 余るとき
仮定より自然数 l を用いて $n=4l+6$ と表せる. $\cos\frac{\pi}{n}=\cos\frac{\pi}{4l+6}$ が有理数と仮定すると, 補題 1 より $\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{n}\right)=\cos\frac{\pi}{2l+3}$ も有理数. これは先程示した (i) より矛盾.

(iv) $n=6$ のとき
$\cos\frac{\pi}{n}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ より有理数でない.

以上を合わせると,

$$n=\begin{cases}5\text{ 以上の奇数}\\4\text{ の倍数}\\10\text{ 以上の }4\text{ で割ると }2\text{ 余る数}\\6\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad n\geqq 4$$

のときに $\cos\frac{\pi}{n}$ が無理数となることがわかった.
$n=1,\ 2,\ 3$ のときはすでに示したように有理数となる.
したがって, $\cos\frac{m}{n}\pi$ が有理数となるのは $n=1,\ 2,\ 3$ のときのみ. ■

4 $\sin p\pi$ が有理数となる必要十分条件

定理 2.$\sin p\pi$ が有理数となる必要十分条件

互いに素である自然数 n と整数 m に対し, 以下の条件は同値.

(1) $\sin \frac{m}{n}\pi$ が有理数

(2) $n = 1,\ 2,\ 6$

[証明] (2)⇒(1) は計算すれば明らか.

(1)⇒(2) を示す.

定理 1 より, 互いに素である自然数 k と整数 l に対し $\cos \frac{l}{k}\pi$ が有理数となるのは $k = 1, 2, 3$ のときのみ.

ここで,

$$\cos \frac{l}{k}\pi = \sin\left(\frac{l}{k}\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{2l+k}{2k}\pi$$

となるので,

(i) $k = 1$ のとき $\sin \frac{2l+k}{2k}\pi = \sin \frac{2l+1}{2}\pi$

(ii) $k = 2$ のとき,l が奇数となることに気をつけると, $\sin \frac{2l+k}{2k}\pi = \sin \frac{l+1}{2}\pi = \sin m\pi$ （m は整数）

(iii) $k = 3$ のとき $\sin \frac{2l+k}{2k}\pi = \sin \frac{2l+3}{6}\pi$ このとき,l は 3 の倍数でないことから,$2l+3$ と 6 は互いに素.

◀ 仮定より k と l は互いに素

すなわち, 分母が 1,2,6 のときのみであることが得られる. ■

5　$\tan p\pi$ が有理数となる必要十分条件

定理 3.$\tan p\pi$ が有理数となる必要十分条件

互いに素である自然数 n と整数 m に対し, 以下の条件は同値.

(1) $\tan \frac{m}{n}\pi$ が有理数

(2) $n = 1,\ 4$

[証明] (2)⇒(1) は計算すれば明らか.
(1)⇒(2) を示す.

$$\begin{aligned}
\tan \frac{m}{n}\pi \text{ が有理数} &\Rightarrow \tan^2 \frac{m}{n}\pi \text{ が有理数} \\
&\Rightarrow \frac{1}{\tan^2 \frac{m}{n}\pi + 1} \text{ が有理数} \\
&\Rightarrow \cos^2 \frac{m}{n}\pi \text{ が有理数} \\
&\Rightarrow \frac{1+\cos \frac{2m}{n}\pi}{2} \text{ が有理数} \\
&\Rightarrow \cos \frac{2m}{n}\pi \text{ が有理数}
\end{aligned}$$

定理 1 より, $\cos \frac{2m}{n}\pi$ が有理数となるためには $n = 1, 2, 3, 4, 6$ である必要がある.
$n = 1, 2, 3, 4, 6$ のとき,$\tan \frac{m}{n}\pi$ が有理数になるかどうか確かめる.

(i) $n = 1$ のとき $\tan m\pi = 0$

(ii) $n = 2$ のとき,$\tan \frac{m}{2}\pi$（m は 2 で割り切れない）は定義されない.

(iii) $n = 3$ のとき,$\tan \frac{m}{3}\pi = \pm\sqrt{3}$（$m$ は 3 と互いに素）

(iv) $n = 4$ のとき,$\tan \frac{m}{4}\pi = \pm 1$（$m$ は 4 と互いに素）

(v) $n = 6$ のとき,$\tan \frac{m}{6}\pi = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$（$m$ は 6 と互いに素）

となるので, 有理数となるのは $n = 1, 4$ のみ. ■

◀ $n = 4,\ 6$ のとき, 約分することで分母がそれぞれ 2,3 になる. 先程の定理では既約分数であることを仮定していたため, 約分する必要がある.

6　まとめ

最初の問題 B への解答は次となる.

問題 B. の解答

有理数 p に対して,$\cos p\pi, \sin p\pi, \tan p\pi$ が有理数となる条件は,

$$\begin{cases} \cos p\pi \text{ が有理数} & \Leftrightarrow p \text{ を既約分数で表したとき, 分母が } 1,2,3 \\ \sin p\pi \text{ が有理数} & \Leftrightarrow p \text{ を既約分数で表したとき, 分母が } 1,2,6 \\ \tan p\pi \text{ が有理数} & \Leftrightarrow p \text{ を既約分数で表したとき, 分母が } 1,4 \end{cases}$$

である.

言い換えた問題 B′ に対しては,

問題 B′. の解答

有理数 q に対して,$\cos q^\circ, \sin q^\circ, \tan q^\circ$ が有理数となる条件は, 整数 n を用いて

$$\begin{cases} \cos q^\circ \text{ が有理数} & \Leftrightarrow q = 60n,\ 90n \\ \sin q^\circ \text{ が有理数} & \Leftrightarrow q = 90n,\ 180n \pm 30 \\ \tan q^\circ \text{ が有理数} & \Leftrightarrow q = 45n \end{cases}$$

である.

これはすなわち, 有名角とよばれる角の三角比にしか, 有理数となるものがないことを述べている. また逆に, 例えば 3 : 4 : 5 の直角三角形の鋭角が, 無理数であることもわかる.