♦ 対称式の基本定理とその証明

1 対称式とは

$x,\ y$ の多項式のうち, x と y を入れ替えても, 元の式と同じになるものを対称式という.
例えば, $x^2+y^2,\ xy,\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ は対称式である. $x-y,\ x^2-y^2,\ x+2y$ は対称式でない.

文字が 3 文字でも, 同じことを考えられる. $x,\ y,\ z$ の多項式のうち, $x,\ y,\ z$ を好きなように入れ替えても, 元の式と同じになるものを対称式という.
例えば, $x^2+y^2+z^2,\ xyz,\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}$ は対称式である. $x-y+z,\ x^2-y^2+z^2,\ x+y+z^2$ は対称式でない.

文字が n 文字でも, 同じことを考えられる. $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$ の多項式のうち, $x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n$ を好きなように入れ替えても, 元の式と同じになるものを対称式という.

2 基本対称式とは

定義

n 個の変数 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ から, k 個の変数を選んで掛け合わせて k 次の単項式を作る. この時, k 個の変数の組み合わせを全て考えて, k 次の単項式を足し合わせてできた対称式を基本対称式といい $\sigma_k(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ と表す.
すなわち,

$$\begin{cases} \sigma_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = x_1+x_2+\cdots+x_n \\ \sigma_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n \\ \sigma_3(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n \\ \qquad\qquad\qquad\cdots \\ \sigma_n(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) = x_1x_2x_3\cdots x_n \end{cases}$$

$\sigma_k(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ は, 変数 $\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ からなる n 変数関数である. 単に σ_k と略記することもある.

難しく見えるが, 具体例に置き換えてみよう. 2 個の変数 $x,\ y$ のとき,

◀ $\sigma_1,\ \sigma_2$ は, $x,\ y$ の関数.

$$\begin{cases} \sigma_1(x,\ y) = x+y \\ \sigma_2(x,\ y) = xy \end{cases}$$

3 個の変数 $x,\ y,\ z$ のとき,

$$\begin{cases}\sigma_1(x,\ y,\ z) = x+y+z \\ \sigma_2(x,\ y,\ z) = xy+yz+zx \\ \sigma_3(x,\ y,\ z) = xyz\end{cases}$$

◀ $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ は, $x,\ y,\ z$ の関数.

3　対称式の基本定理

定理（対称式の基本定理）

$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ についての対称式 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n)$ は基本対称式 $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_n$ に関する整式 $g(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots,\ \sigma_n)$ として一意に表すことができる.

例えば, 文字が 2 文字のとき

$$x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy = \sigma_1^2-2\sigma_2$$
$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{(x+y)^2-2xy}{xy} = \frac{\sigma_1^2-2\sigma_2}{\sigma_2}$$

◀ $\sigma_1 = x+y$, $\sigma_2 = xy$

文字が 3 文字のとき,

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2 &= (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) = \sigma_1^2-2\sigma_2 \\ x^3+y^3+z^3 &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz \\ &= (x+y+z)\left\{(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)\right\}+3xyz \\ &= \sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2)-3\sigma_3\end{aligned}$$

◀ $\sigma_1 = x+y+z$, $\sigma_2 = xy+yz+zx$, $\sigma_3 = xyz$

4　基本定理の証明の準備

定理を証明するために, 単項式・多項式に対して辞書式順序というものを定義する.

◀ 本サイト独自の定義.

定義

単項式 $X,\ Y$ が

$$\begin{cases} X = Ax_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n} \\ Y = Bx_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n} \end{cases}$$

と表されるとき, 以下のように辞書式順序を定める.

X は Y より<u>強い</u>(Y は X より<u>弱い</u>) $\Leftrightarrow$ 次のいずれかが成立.

- $p_1 > q_1$
- $p_1 = q_1,\ p_2 > q_2$
  $\cdots$
- $p_1 = q_1,\ p_2 = q_2,\ \cdots,\ p_{n-1} = q_{n-1},\ p_n > q_n$

$x_1,\ \cdots,\ x_n$ に関する多項式 $f,\ g$ に対し, f が g より<u>強い</u>
$\Leftrightarrow$ f の項のうち最も強い項が g の項のうち最も強い項より強い.

5　基本定理の証明

まずは f が基本対称式で表せることを示す.
k 次の項のみを含む対称式について示す.

◀ 一般の対称式は $\displaystyle\sum_k (k$ 次の対称式) と表すことができる

対称式 $f(x_1,\ \cdots,\ x_n)$ の項のうち, 最も強い項を

$$Ax_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n} \qquad \cdots\cdots ①$$

とする. このとき, f は対称式ゆえ

$$p_1 \geqq p_2 \geqq \cdots \geqq p_n$$

が成立. ここで,

◀ 例えば, 文字が 3 文字のとき $(p_1,\ p_2,\ p_3) = (1,\ 3,\ 1)$ が項としてあれば, 対称式ゆえ $(3,\ 1,\ 1)$ の項も存在.

$$\begin{aligned} g_1(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n) &= A\sigma_1^{p_1-p_2}\sigma_2^{p_2-p_3}\cdots\sigma_n^{p_n} \\ &= A\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^{p_1-p_2}\left(\sum_{i,\ j} x_ix_j\right)^{p_2-p_3}\cdots(x_1x_2\cdots x_n)^{p_n} \end{aligned}$$

と g_1 を定めると, これは対称式で, 最も強い項は① となる.

すなわち,

$$f_1 = f(x_1,\ \cdots,\ x_n) - g_1(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n)$$

とすれば, f_1 は f より弱い.

次に f_1 の最強の項について同じことを考える. すなわち, f_1 の最強の項と同じ項を持つ対称式 g_2 をもってきて,

$$f_2 = f_1(x_1,\ \cdots,\ x_n) - g_2(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n)$$

とすれば, f_2 は f_1 より弱い.

これを繰り返すごとに, f_n は弱くなっていくので最終的に

$$\begin{aligned} f &= g_1(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n) + f_1(x_1,\ \cdots,\ x_n) \\ &= g_1(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n) + g_2(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n) + f_2(x_1,\ \cdots,\ x_n) \\ &= g_1(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n) + g_2(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n) + \cdots + g_m(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n) \end{aligned}$$

となり, f は基本対称式のみで表せる.

次に一意性を背理法を用いて示す.
f を基本対象式のみで表す式が複数ある, すなわち

$$\begin{cases} f(x_1,\ \cdots,\ x_n) = g(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n) = g'(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n) \\ g(x_1,\ \cdots,\ x_n) \neq g'(x_1,\ \cdots,\ x_n) \end{cases}$$

を満たす $g,\ g'$ があると仮定する.

このとき,

$$h(x_1,\ \cdots,\ x_n) = g(x_1,\ \cdots,\ x_n) - g'(x_1,\ \cdots,\ x_n)$$

とおくと, 仮定より

$$\begin{cases} h(x_1,\ \cdots,\ x_n) \neq 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ h(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n) = 0 & \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$$

を満たす.
② より, ある定数 $a_1,\ \cdots,\ a_n$ が存在して

$$h(a_1,\ \cdots,\ a_n) \neq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

このとき, 方程式

$$X^n - a_1X^{n-1} + a_2X^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n = 0$$

の解を $\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n$ とすると, 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \sigma_1(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n) = a_1 \\ \sigma_2(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n) = a_2 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \sigma_n(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n) = a_n \end{cases}$$

④ に代入して,

$$h\left(\sigma_1(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n),\ \sigma_2(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n),\ \cdots,\ \sigma_n(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_n)\right) \neq 0$$
$$\therefore h(\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_n) \neq 0$$

これは③ に反する.
背理法の仮定が間違っているので, f を基本対称式で表す式は一意であることが導かれる. ■