♦ 方程式の有理数解

1　3次方程式の有理数解

定理

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ $(a,\ b,\ c,\ d$ は整数, $a\neq 0)$ が有理数解 $\dfrac{q}{p}$ を持つ
$\Rightarrow p$ は a の約数かつ, q は d の約数

(証明)
$\dfrac{q}{p}(p,\ q$ は互いに素) は $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解だから

$$a\left(\frac{q}{p}\right)^3+b\left(\frac{q}{p}\right)^2+c\left(\frac{q}{p}\right)+d=0$$

両辺に p^3 を掛けて

$$aq^3+bpq^2+cp^2q+dp^3=0 \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ を以下のように変形する.

$$\begin{cases}-aq^3=p(bq^2+cpq+dp^2) & \cdots ① \\ -dp^3=q(aq^2+bpq+cp^2) & \cdots ②\end{cases}$$

$p,\ q$ は互いに素だから,
① より $-aq^3$ は p の倍数 $\Rightarrow a$ は p の倍数 $\Rightarrow p$ は a の約数
② より $-dp^3$ は q の倍数 $\Rightarrow d$ は q の倍数 $\Rightarrow q$ は d の約数

2　n 次方程式の有理数解

定理

$a_n x^{\mathrm{n}} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ (各 a_k は整数, $a_n \neq 0$) が有理数解 $\dfrac{q}{p}$ を持つ
$\Rightarrow p$ は a_n の約数かつ, q は a_0 の約数

(証明)
$\dfrac{q}{p}(p,\ q$ は互いに素) は $a_n x^{\mathrm{n}} + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ の解だから

◀ 3 次のときと証明の流れは全く一緒.

$$a_n \left(\frac{q}{p}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{q}{p}\right) + a_0 = 0$$

両辺に p^n を掛けて

$$a_n q^n + a_{n-1}pq^{n-1} + \cdots + a_1 p^{n-1} q + a_0 p^n = 0 \qquad \cdots(*)$$

$(*)$ を以下のように変形する.

$$\begin{cases} -a_n q^n = p(a_{n-1}q^{n-1} + \cdots + a_1 p^{n-2} q + a_0 p^{n-1}) & \cdots ① \\ -a_0 p^n = q(a_n q^{n-1} + a_{n-1}pq^{n-2} + \cdots + a_1 p^{n-1}) & \cdots ② \end{cases}$$

$p,\ q$ は互いに素だから,
① より $-a_n q^n$ は p の倍数 $\Rightarrow a_n$ は p の倍数 $\Rightarrow p$ は a_n の約数
② より $-a_0 p^n$ は q の倍数 $\Rightarrow a_0$ は q の倍数 $\Rightarrow q$ は a_0 の約数