(1) a を定数とする．不等式 $x^2-(4a+1)x+4a^2+2a<0$ を満たす x の範囲は $\boxed{}$ である．また, 不等式 $x^2-(4a+1)x+4a^2+2a<0$ を満たす整数 x が $x=2$ だけであるような a の範囲は $\boxed{}$ である．

(2) 数列 $\{a_n\}$ は関係式

$$a_1=3,\ a_{n+1}-a_n=2(3^n-n)\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たすとする. このとき, $a_4=\boxed{}$ であり, $a_n=\boxed{}$ である.

(3) $\log_2(4-x)+\log_4(x-1)=\dfrac{1}{2}$ をみたす x は $x=\boxed{}$ である.

(4) a を定数とし, $f(x)=x^3-3x^2-9x+a$ とする．区間 $-2\leqq x\leqq 0$ における $f(x)$ の最小値が 5 であるとき，$a=\boxed{}$ である. またこのとき, 区間 $-2\leqq x\leqq 0$ における $f(x)$ の最大値は $\boxed{}$ である.

(5) $z=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ とする．z^n が実数となる最小の自然数 n は $n=\boxed{}$ であり, このとき $z^n=\boxed{}$ である. ただし i は虚数単位である.

(6) △ABC において, 外接円の中心を O, その半径を 1 とし，三角形の 3 つの内角の比は ∠A : ∠B : ∠C = 2 : 5 : 5 であるとする．このとき, ∠BOC = $\boxed{}$ であり，△ABC の面積は $\boxed{}$ である.

(7) 1 枚の硬貨を投げ, 表が出たときは白球 1 個を壺に入れ, 裏が出たときは黒球 1 個を壺に入れる．硬貨を 3 枚投げて壺に 3 個の球が入っている.

(i) 壺に白球 1 個と黒球 2 個が入っている確率は $\boxed{}$ である.

(ii) 壺の中から 2 個の球を取り出したとき, それが白球 1 個と黒球 1 個である確率は $\boxed{}$ である.

(8) 等式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{y}=1$ を満たす自然数 $x,\ y$ の組は $(x,\ y)=\boxed{}$ である.

(9) 1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において, 点 A から △BCD におろした垂線の足を H とする．△ABH を直線 AH を軸として 1 回転してできる立体の体積は $\boxed{}$ である．また, この正四面体を直線 AB を軸として 1 回転してできる立体の体積は $\boxed{}$ である.

(10) 6 個の文字 $a,\ a,\ b,\ b,\ b,\ c$ を 1 列に並べる並べ方は $\boxed{}$ 通りある．またこのうち,2 個の a の間に c がある（c は a の隣になくてもよい）並べ方は $\boxed{}$ 通りある.

(11) 3 辺の長さが $a,\ 2,\ 1$ である三角形が存在するための a の範囲は $\boxed{}$ である．また, 3 辺の長さが $a,\ 2,\ 1$ である三角形が直角三角形であるとき, $a=\boxed{}$ である.

(12) n を自然数とする．xy 平面において,2 つの放物線 $y=nx^2,\ x=(n+1)y^2$ で囲まれた部分の面積を S_n とする.

(i) S_n を求めよ.

(ii) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求めよ.

(16 愛知工業大・改)

(1) 因数分解できる.

$$\begin{aligned}x^2-(4a+1)\,x+4a^2+2a&<0\\x^2-(4a+1)\,x+2a\,(2a+1)&<0\\(x-2a)\,(x-2a-1)&<0\end{aligned}$$

したがって $\underline{\underline{2a<x<2a+1}}$

この区間内に入る整数が 2 だけとなればよいので,

$$\begin{cases}2a<2\\2<2a+1\end{cases}$$

これを解いて, $\underline{\underline{\dfrac{1}{2}<a<1}}$

(2) 階差数列がわかっているので, 公式に代入.

$$\begin{aligned}a_n&=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\qquad(n\geqq 2)\\&=3+\sum_{k=1}^{n-1}2\left(3^k-k\right)\\&=3+2\times\left\{\frac{3\left(3^{n-1}-1\right)}{3-1}-\frac{n\,(n-1)}{2}\right\}\\&=\underline{\underline{3^n-n^2+n}}\end{aligned}$$

よって $a_4=3^4-4^2+4=\underline{\underline{69}}$

◀ 変形が思いつかなければ, (当然だが) 漸化式から a_2, a_3 を求めてから a_4 を求める. 部分点だけでも狙える.

(3) 真数条件より

$$4-x>0,\quad x-1>0$$
$$\therefore 1<x<4$$

底を 2 に揃えて

$$\begin{aligned}\log_2(4-x)+\frac{\log_2(x-1)}{\log_2 4}&=\frac{1}{2}\\2\log_2(4-x)+\log_2(x-1)&=1\\\log_2(4-x)^2(x-1)&=\log_2 2\\(4-x)^2(x-1)&=2\\x^3-9x^2+24x-18&=0\\(x-3)(x^2-6x+6)&=0\end{aligned}$$
$$\therefore x=3,\ 3\pm\sqrt{3}$$

真数条件より, $\underline{\underline{x=3,\ -\sqrt{3}}}$

(4) 増減表を描く.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x-3)(x+1)$$

x	-2		-1		0
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$a-2$	$\nearrow$	$a+5$	$\searrow$	a

増減表より, 最小値は $x=-2$ のとき $a-2$. これが 5 なので, $\underline{\underline{a=7}}$ このとき最大値 $a+5 = \underline{\underline{12}}$

(5) z を極形式で表すと

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

ド・モアブルの定理より,

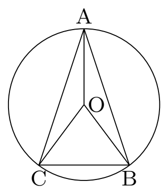
$$z^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{12} + i\sin\frac{n\pi}{12}\right)$$

z^n が実数, つまり虚部が 0 となる最小の自然数は $\underline{\underline{n=12}}$ このとき,

$$z^{12} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{12}\left(\cos\frac{12\pi}{12} + i\sin\frac{12\pi}{12}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{64}}}$$

(6) 三角形の内角の和は 180° だから,

$$\begin{aligned} \angle A &= \frac{2}{12} \times 180^\circ = 30^\circ \\ \angle B = \angle C &= \frac{5}{12} \times 180^\circ = 75^\circ \end{aligned}$$



円周角の定理より

$$\angle BOC = 2\angle A = 2 \times 30^\circ = \underline{\underline{60^\circ}}$$

$\angle BOC = 60^\circ$, $OB = OC$ より三角形 OBC は正三角形. すなわち $BC = 1$

また, O から BC におろした垂線の足を H とすると, $OH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので $AH = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ◀ 三平方の定理

$$\triangle ABC = BC \times AH \times \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}}}$$

(7) (i) 反復試行の確率.

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

(ii) 壺の中に入っている球の組は

$$(白, 黒) = (0,\ 3),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 0)$$

があり得るが, 問題の条件より白と黒がそれぞれ少なくとも 1 つずつ入っていなければいけない. したがって

$$(白, 黒) = (1,\ 2),\ (2,\ 1)$$

となる. これらが起こる確率は (i) よりそれぞれ $\dfrac{3}{8}$ である.

このとき白 1 個, 黒 1 個を取り出す確率はともに

$$\frac{{}_1C_1 \times {}_2C_1}{{}_3C_2} = \frac{2}{3}$$

となるので求める確率は

$$\left(2 \times \frac{3}{8}\right) \times \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

(8) 分数の形をした不定方程式. 分母を払い, 因数分解することを考える.

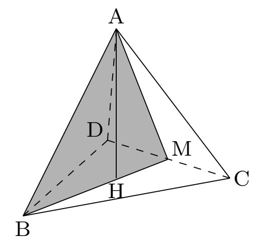
$$\begin{aligned} y + 5x &= xy \\ xy - 5x - y &= 0 \\ (x-1)(y-5) &= 5 \end{aligned}$$

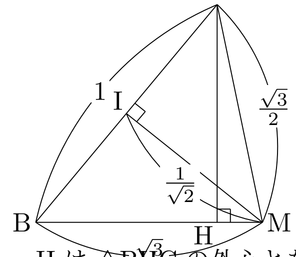
いま, $x,\ y$ は自然数なことに気をつけると, $(x-1,\ y-5) = (1,\ 5)(5,\ 1)$ のみ.

したがって $(x,\ y) = \underline{\underline{(2,\ 10),\ (6,\ 6)}}$

(9) $\triangle ABH$ を AH を軸として 1 回転させると, 円錐ができる. その高さは AH で, 半径は BH. したがって AH と BH の長さが分かれば良い. DC の中点を M とおく.

AM の長さは正三角形 ADC の高さなので $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 同様に MB の長さも $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.





H は $\triangle BDC$ の外心となり, 正三角形では外心と重心は一致するので重心でもある.

よって $\mathrm{BH} = \dfrac{2}{3}\mathrm{BM} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ から, $\mathrm{AH} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$
求めたかった AH と BH が求まった. 求めるべき回転体の体積は

$$\frac{1}{3}\pi \cdot \mathrm{BH}^2 \cdot \mathrm{AH} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{27}\pi}}$$

◀ (AH の求め方の別解) △ABM の面積を 2 通りで表す. AM = BM より, MI ⊥ AI となる. AB × MI = BM × AH に代入して $\mathrm{AH} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

直線 AB を軸として正四面体を回したとき, AB から距離が一番遠い点は C(または D) であるから, 直線 AB を軸にして △ABC を回してできる立体と同じ.
AB の中点 N として, $\mathrm{AN} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である.

◀ AM と同じ長さ.

できあがる回転体は, △ANC を回転させてできる円錐と △BNC を回転させてできる円錐を重ねたものであるから, AN = BN より

$$2 \times \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}$$

(10) 同じものを含む順列なので

$$\frac{6!}{1! \cdot 3! \cdot 2!} = \underline{\underline{60(\text{通り})}}$$

○ 3 つと b3 つを並べ替える順列と見る.

◀ ○に左から a, c, a を入れれば良い. この入れ方は 1 通り.

$$\frac{6!}{3! \cdot 3!} = \underline{\underline{20(\text{通り})}}$$

(11) 三角不等式から

◀ 長さ a, b, c の辺を持つ三角形において, $|a-b| < c < a+b$

$$|2-1| < a < 2+1$$
$$\underline{\underline{1 < a < 3}}$$

また, 三平方の定理より
(i) a が斜辺のとき

$$a = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

これは条件を満たす.
(ii) 2 が斜辺のとき

$$a = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

これは条件を満たす.
したがって $\underline{\underline{a = \sqrt{3},\ \sqrt{5}}}$

(12) (i) 2 曲線の交点を求める.

$$y = n\left\{(n+1)y^2\right\}^2$$
$$y = n(n+1)^2 y^4$$
$$y\left(y^3 - \frac{1}{n(n+1)^2}\right) = 0$$
$$y = 0,\ \left(\frac{1}{n(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

したがって 2 曲線の交点は $(0,\ 0)$, $\left(\left(\dfrac{1}{n^2(n+1)}\right)^{\frac{1}{3}},\ \left(\dfrac{1}{n(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)$

$p = \left(\dfrac{1}{n^2(n+1)}\right)^{\frac{1}{3}}$, $q = \left(\dfrac{1}{n(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{3}}$ とおくと求める S_n は

◀ 長方形領域から定積分を引く.

$$\begin{aligned}
S_n &= pq - \int_0^p nx^2\,\mathrm{d}x - \int_0^q (n+1)y^2\,\mathrm{d}y \\
&= pq - \left[\frac{n}{3}x^3\right]_0^p - \left[\frac{n+1}{3}y^3\right]_0^q \\
&= \left(\frac{1}{n^2(n+1)} \cdot \frac{1}{n(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{n}{3} \cdot \frac{1}{n^2(n+1)} - \frac{n+1}{3} \cdot \frac{1}{n(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{n(n+1)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \\
&= \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n(n+1)}}}
\end{aligned}$$

(ii) $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k$ とする.

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{k(k+1)} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left\{\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

$n \to \infty$ の極限を考えて

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} T_n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \qquad = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

The answer was written by $fa\ell$