次の $\boxed{\quad}$ を適当に補え.

(1) xy 平面において, 放物線 $y=x^2$ を y 軸方向に $\boxed{\quad}$ だけ平行移動すると, 直線 $y=2x$ に接する. また, 放物線 $y=x^2$ を x 軸方向に 1, y 軸方向に 3 だけ平行移動すると, 原点を通る直線 $\boxed{\quad}$ に接する.

(2) 数列 $\{a_n\}$ はすべての自然数 n について, $a_n>0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(2a_k^2+1\right)=6n^3-3n^2$ を満たすとする. このとき, $a_n=\boxed{\quad}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2a_k+1)=\boxed{\quad}$ である.

(3) a, b は実数とする. 3 次方程式 $x^3+ax^2+3bx+2b=0$ の実数解が $x=-2$ だけのとき, a の範囲は $\boxed{\quad}$ である.

(4) $0\leqq x\leqq 1$ において, $f(x)=\displaystyle\int_0^1|t-x|\,\mathrm{d}t$ とする. このとき, $f(x)$ の最小値は $\boxed{\quad}$ である. また xy 平面において, 原点から曲線 $y=f(x)$ に引いた接線の方程式は $\boxed{\quad}$ である.

(5) 複素数 z は $z-\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}i$, $\dfrac{\pi}{2}\leqq\arg z\leqq\pi$ を満たすとする. このとき $|z|=\boxed{\quad}$, $\arg z=\boxed{\quad}$ であり, また $z^{29}-\dfrac{1}{z^{29}}=\boxed{\quad}$ である. ただし i は虚数単位である.

(6) a, b は実数とする. 次の $\boxed{\quad}$ の中に適するものを下の選択肢 (あ)～(え) の中から選んでその記号を記入せよ.

(i) $a^2=b^2$ は $a=b$ であるための $\boxed{\quad}$.

(ii) $a+b>2$ は $a>1$ または $b>1$ であるための $\boxed{\quad}$.

(iii) $a>b$ は $a^2>b^2$ であるための $\boxed{\quad}$.

(iv) $a^2>b^2$ は $a^4>b^4$ であるための $\boxed{\quad}$.

選択肢

(あ) 必要条件であるが十分条件でない　　(い) 十分条件であるが必要条件でない

(う) 必要十分条件である　　(え) 必要条件でも十分条件でもない

(7) A 君は地下鉄に乗り, 次にバスに乗って学校に行く. A 君は傘を持って地下鉄に乗ると確率 $\dfrac{1}{8}$ で傘を忘れる. また, A 君は傘を持ってバスに乗ると確率 $\dfrac{1}{10}$ で傘を忘れる. ある日, A 君は傘を持って学校に行き, 学校についたとき, 傘を忘れていることに気づいた. このとき, 地下鉄に傘を忘れた確率は $\boxed{\quad}$, バスに傘を忘れた確率は $\boxed{\quad}$ である.

(8) $\triangle$ABC において, BC $=\sqrt{2}$, $\angle$C $=30^\circ$, $\angle$A は鋭角, 外接円 O の半径は 1 とする. このとき $\angle$B $=\boxed{\quad}$ である. また, 点 A で円 O に内接する円 I が辺 BC に点 P で接しているとすると, $\angle$BAP $=\boxed{\quad}$ である.

(9) 2 つの 3 桁の自然数 $7n+36$ と $5n+23$ がある. これらが互いに素でないような自然数 n のうち最小のものは $\boxed{\quad}$ であり, このとき, $7n+36$ と $5n+23$ の最大公約数は $\boxed{\quad}$ である.

(10) 1 から 12 までの番号か書かれた 12 枚のカードから 3 枚を同時に引く. その 3 枚のカードの番号が 1, 2, 3 である確率は $\boxed{\quad}$ である. また, 1 枚のカードの番号が奇数で 2 枚のカードの番号が偶数である確率は $\boxed{\quad}$ である.

(11) 正四面体 ABCD の 3 辺 AB, AC, AD の中点 P, Q, R を通る平面で, 正四面体の A のかどを切り取る. 同様にして他の 3 つのかども切り取ってできる多面体の頂点の数は $\boxed{\quad}$, 辺の数は $\boxed{\quad}$, 面の数は $\boxed{\quad}$ である.

(12) $f(x)=-2|x-1|+4$ とする.

(a) xy 平面において, $y=f(x)$ のグラフをかけ.

(b) 点 P が $y=f(x)$ 上を動くとき, 点 P と原点 O との距離の最小値を求めよ.

(17 愛知工業大)

今更なのですが記号の凡例です.
ex.
:例示 (Example)
cf.
:参考, 参照 (Confer:ラテン語だそうです)
Rem.
:注意 (Remark)
def.
:定義 (Definition)
上の 2 つはよく使います. 下の 2 つは極力日本語で書くように気をつけていますが, 癖で書いてしまうかもしれません.

(1) y 方向に a だけ動かして接するとき,

$$(x^2+a)-2x=0$$

の判別式が 0 となるから

$$(-2)^2-4a=0$$
$$\underline{\underline{a=1}}$$

また, 放物線 $y=x^2$ を x 軸方向に 1, y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線は $y=(x-1)^2+3$ である. $y=mx$ と接するとき,

$$(x-1)^2+3-mx=0$$
$$x^2-(m+2)x+4=0$$

の判別式が 0 になることから

$$(m+2)^2-4\cdot 4=0$$
$$m+2=\pm 4$$
$$m=2,\ -6$$

したがって, $\underline{\underline{y=2x,\ y=-6x}}$

(2) 第 n 部分和から第 $n-1$ 部分和を引く.

$$\begin{aligned}
2a_n^2+1&=\sum_{k=1}^{n}\left(2a_k^2+1\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\left(2a_k^2+1\right)\qquad(n\geqq 2)\\
&=\left(6n^3-3n^2\right)-\left\{6(n-1)^3-3(n-1)^2\right\}\\
&=6\left\{n^3-(n-1)^3\right\}-3\left\{n^2-(n-1)^2\right\}\\
&=6(3n^2-3n+1)-3(2n-1)\\
&=18n^2-24n+9\\
2a_n^2&=18n^2-24n+8\\
a_n^2&=9n^2-12n+4=(3n-2)^2\ \therefore a_n\qquad=\pm(3n-2)
\end{aligned}$$

◀ n 番目まで足したものから, $n-1$ 番目まで足したものを引くと, n 番目のみが得られる.
cf.) 和の数列に関する公式 ($n\geqq 2$)
$a_n=S_n-S_{n-1}$

$a_n > 0$ より

$$a_n = 3n-2 \qquad (n \geqq 2)$$

また初項は,

$$\sum_{k=1}^{1}\left(2a_k^2+1\right) = 6\cdot 1^3 - 3\cdot 1^2$$
$$2a_1^2+1 = 3$$

$a_1 > 0$ より

$$\therefore a_1 = 1$$

したがって, $n=1$ のときも成立. 以上より, $\underline{\underline{a_n = 3n-2}}$

このとき,

$$\sum_{k=1}^{n}(2a_k+1) = \sum_{k=1}^{n}(6k-3)$$
$$= 6\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 3n$$
$$= \underline{\underline{3n^2}}$$

(3) $x=-2$ が解であるから, 代入して

$$-8+4a-6b+2b = 0$$
$$\therefore b = a-2$$

もとの式に代入することで

$$x^3+ax^2+3(a-2)x+2(a-2) = 0$$
$$(x+2)\left\{x^2+(a-2)x+(a-2)\right\} = 0$$

$x^2+(a-2)x+(a-2)=0$ の解を考察する.

(i) 方程式の解が 2 つの虚数解のとき

判別式 $D<0$ を解いて

$$(a-2)^2-4(a-2) < 0$$
$$a^2-8a+12 < 0$$
$$(a-6)(a-2) < 0$$
$$\therefore 2 < a < 6$$

(ii) 方程式が $x=-2$ で重解をもつとき

判別式 $D=0$ を解いて $a=2,\ 6$

$a=2$ のとき, もとの方程式は $x^2=0$, 解が $x=-2$ でないので不適.

$a=6$ のとき, もとの方程式は $x^2-4x+4=0$. これは $x=-2$ で重解となる.

◀ 先程の結果からわかる

(i)(ii) より, a の範囲は $\underline{\underline{2 < a \leqq 6}}$

(4) $f(x)$ は計算できる.

$$f(x) = \int_0^x -(t-x)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 (t-x)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\left[\frac{1}{2}t^2 - xt\right]_0^x + \left[\frac{1}{2}t^2-xt\right]_x^1$$
$$= -\left(\frac{1}{2}x^2-x^2\right) + \left\{\left(\frac{1}{2}-x\right) - \left(\frac{1}{2}x^2-x^2\right)\right\}$$
$$= x^2 - x + \frac{1}{2}$$
$$= \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

$0 \leqq x \leqq 1$ より, 最小値は $\underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

原点からひいた直線 $y=mx$ が $y=f(x)$ と接するとき,

$$\left(x^2-x+\frac{1}{2}\right) - mx = 0$$

の判別式が 0 となる.

$$(-m-1)^2 - 4\cdot\frac{1}{2} = 0$$
$$(m+1)^2 = 2$$
$$m+1 = \pm\sqrt{2}$$
$$m = -1\pm\sqrt{2}$$

◀ 解答は $y=\left(-1\pm\sqrt{2}\right)x$ ではない. $y=f(x)$ の定義域が $0\leqq x \leqq 1$ なので, 接点がこの範囲にある必要がある.

このとき, 接点の x 座標は $x=\dfrac{m+1}{2}$ となる.x の定義域より

$$0 \leqq x \leqq 1$$
$$0 \leqq \frac{m+1}{2} \leqq 1$$
$$0 \leqq m+1 \leqq 2$$
$$-1 \leqq m \leqq 1$$

これを満たす m は $m=-1+\sqrt{2}$ のみ. $\therefore\ \underline{\underline{y=\left(-1+\sqrt{2}\right)x}}$

(5) 与式から方程式を解き具体的に z を求めることができる.

$$z^2-\sqrt{3}iz-1=0$$
$$\therefore z=\frac{\sqrt{3}i\pm1}{2}$$

$\dfrac{\pi}{2}\leqq \arg z\leqq \pi$ より実部は負, 虚部は正.

$$\therefore z=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$

したがって,$|z|=\underline{\underline{1}}$, $\arg z=\underline{\underline{\dfrac{2\pi}{3}}}$

$$\begin{aligned}z^{29}&=\cos\frac{58}{3}\pi+i\sin\frac{58}{3}\pi\\&=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\qquad=\overline{z}\end{aligned}$$

となるので,

$$z^{29}-\frac{1}{z^{29}}=\overline{z}-\frac{1}{\overline{z}}=\overline{\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\overline{\sqrt{3}i}=\underline{\underline{-\sqrt{3}i}}$$

(6) (i) $a^2=b^2\ \Rightarrow\ a=b$ は偽（反例 $a=1,\ b=-1$）.
$a^2=b^2\ \Leftarrow\ a=b$ は真.
したがって,$\underline{\underline{\text{（あ）必要条件であるが十分条件でない}}}$

(ii) $a+b>2\ \Rightarrow\ a>1$ または $b>1$ は真.（対偶がすぐに証明できる）.
$a+b>2\ \Leftarrow\ a>1$ または $b>1$ は偽（反例 $a=2,\ b=-100$）.
したがって,$\underline{\underline{\text{（い）十分条件であるが必要条件でない}}}$

(iii) $a>b\ \Rightarrow\ a^2>b^2$ は偽（反例 $a=1,\ b=-2$）.
$a>b\ \Leftarrow\ a^2>b^2$ は偽（反例 $a=-2,\ b=1$）.
したがって,$\underline{\underline{\text{（え）必要条件でも十分条件でもない}}}$

(iv) $a^2>b^2\ \Rightarrow\ a^4>b^4$ は真（$a^2,\ b^2$ が正だから）.
$a^2>b^2\ \Leftarrow\ a^4>b^4$ は真（$a^2,\ b^2$ が正だから）.
したがって,$\underline{\underline{\text{（う）必要十分条件である}}}$

◀ 証明: $a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)$ より, a^4-b^4 と a^2-b^2 の正負が一致するから, 必要十分条件となる.

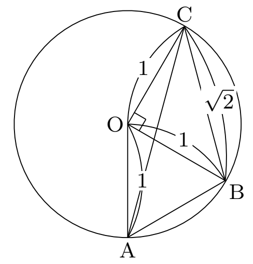
(7) 地下鉄に傘を忘れていた確率は $\dfrac{1}{8}$. バスに傘を忘れた確率は, 地下鉄で忘れずにバスで忘れた確率だから

$$\frac{7}{8}\times\frac{1}{10}=\frac{7}{80}$$

いま, 傘を忘れているという事実がわかっているので, 条件付き確率を求めればよく

$$\text{地下鉄}:\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{7}{80}}=\underline{\underline{\frac{10}{17}}}$$
$$\text{バス}:\frac{\frac{7}{80}}{\frac{1}{8}+\frac{7}{80}}=\underline{\underline{\frac{7}{17}}}$$

(8) 右図のようになる. 特に $\angle\mathrm{C}=30^\circ$ より, 円周角の定理から $\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$, すなわち $\triangle\mathrm{AOB}$ は正三角形. また, $\triangle\mathrm{OBC}$ の辺の比が $1:1:\sqrt{2}$ より直角二等辺三角形になることもわかる.



したがって $\triangle\mathrm{ABC}$ の $\angle\mathrm{B}$ は

$$\angle\mathrm{B}=\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{OBA}+\angle\mathrm{OBC}=60^\circ+45^\circ=\underline{\underline{105^\circ}}$$

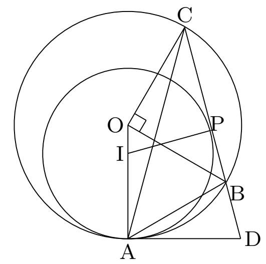
円 O の点 A における接線と直線 BC の交点を D とすると, $\angle\mathrm{BAD}=30^\circ$ より $\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{B}-\angle\mathrm{BAD}=75^\circ$

$\angle\mathrm{IAD}=\angle\mathrm{IPD}=90^\circ$ より 4 点 I, A, D, P は ID を直径とする円周上にある.

故に $\angle\mathrm{AIP}=180^\circ-\angle\mathrm{ADB}=105^\circ$

$\triangle\mathrm{IAP}$ は二等辺三角形ゆえ $\angle\mathrm{IAP}=\dfrac{1}{2}(180^\circ-\angle\mathrm{AIP})=37.5^\circ$

したがって $\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{BAO}-\angle\mathrm{AIP}=\underline{\underline{22.5^\circ}}$



(9) ユークリッドの互除法を用いて

$$\begin{aligned}7n+36&=(5n+23)+2n+13\\5n+23&=2(2n+13)+n-3\\2n+13&=2(n-3)+19\end{aligned}$$

19 は素数であるので, $7n+36$ と $5n+23$ 最大公約数は $\underline{\underline{19}}$

◀ 最後に出てきた余りが素数でない場合は, その数の約数となる場合がある.

$7n+36$ と $5n+23$ の最大公約数が 19 とわかったので, ユークリッドの互除法より, $2n+13,\ n-3$ も 19 の倍数.

$$\begin{aligned}n-3&=19k\\n&=19k+3\end{aligned}$$

n は自然数なので, $k\geqq1$. このとき,

$$\begin{cases}7n+36=7(19k+3)+36=133k+57\geqq100\\5n+23=5(19k+3)+23=95k+38\geqq100\end{cases}$$

となり,$k=1$ ではそれぞれ 3 桁の自然数となることが確かめられる. したがって $n=19+3=\underline{\underline{22}}$ が最小.

◀ 問題の条件,「3 桁の自然数」という部分の確認.

(10) 1, 2, 3 が出る確率は, 組み合わせで考えて

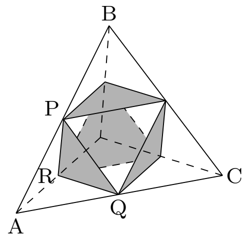
$$\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \underline{\underline{\frac{1}{220}}}$$

同様にして 1 枚が奇数, 2 枚が偶数となる確率は

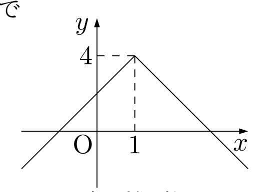
$$\frac{{}_6\mathrm{C}_1{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_3} = \underline{\underline{\frac{9}{22}}}$$

(11) 正三角形が 8 枚合わさった図形となるので, 正八面体ができる.

頂点の数は $\underline{\underline{\ 6\ }}$, 辺の数は $\underline{\underline{\ 12\ }}$, 面の数は $\underline{\underline{\ 8\ }}$ である.



(12) (i) $-2|x-1|+4$ のグラフは, $y=-2(x-1)$ のグラフを描いて絶対値を取り, y 軸方向に 4 平行移動すればいいので



(ii) 明らかに折れ線の左側の直線とのほうが距離が短いので, この直線と原点との距離を求めると

$$\begin{aligned} y &= -2(-x+1)+4 \\ 2x-y+2 &= 0 \\ \therefore d &= \frac{|2|}{2^2+(-1)^2} = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{5}}}} \end{aligned}$$

The answer was written by $fa\ell$