次の $\boxed{}$ を適当に補え.(60 分)

(1) 方程式 $|x-1|+2|2-x|=4$ を満たす実数 x の値は $\boxed{}$ である.

(2) 数列 $\{a_n\}$ は初項 1, 公比 $\sqrt{2}$ の等比数列とする. このとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n^2 = \boxed{}$ である. また, $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{10}$ の異なる 2 項 $a_ia_j\ (i<j)$ すべての和は $\boxed{}$ である.

(3) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$ のとき, $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\boxed{}$ であり, $\tan\theta=\boxed{}$ である.

(4) $0<a<1$ とする. $\displaystyle\int_0^1 |x-a|\,\mathrm{d}x=\frac{3}{8}$ のとき, $a=\boxed{}$ である.

(5) $z=\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ のとき, $z+z^2+z^3+z^4=\boxed{}$, $z+\overline{z}=\boxed{}$ である. ただし i は虚数単位, $\overline{z}$ は z の共役複素数である.

(6) a を定数とする. x についての不等式

$$x^2-(a^2-3)x+(a^2-a)(a-3)<0$$

を満たす x の範囲は $\boxed{}$ であり, この範囲にある全ての x が $x^2-4<0$ を満たすような a の範囲は $\boxed{}$ である.

(7) $\triangle$ABC において, AB $=4$, BC $=5$, CA $=3$ とする. 頂点 A から辺 BC におろした垂線の足を H とすると, AH $=\boxed{}$ である. また, $\angle$A を三等分する直線と辺 BC との交点のうち頂点 B に近い方の点を P とすると, BP $=\boxed{}$ である.

(8) 1 つのサイコロを 2 回投げて, 1 回目に出た目を a, 2 回目に出た目を b とし, x の 2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ をつくる. この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解を持つ確率は $\boxed{}$ であり, 重解を持つ確率は $\boxed{}$ である.

(9) 実数 x に対して, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする. このとき, $\left[\dfrac{100}{3}\right]+\left[\dfrac{200}{3}\right]=\boxed{}$ である. また, $\left[\dfrac{n}{3}\right]+\left[\dfrac{2n+1}{3}\right]=100$ を満たす n は $n=\boxed{}$ である.

(10) 円 O の外部に点 P がある.P を通る直線と円 O のが異なる 2 点で交わるとし, その交点を P をに近い順に Q, R とする. また, P から円 O に接線を引き, その接点を T とし TR は円 O の直径であるとする. PQ $=3$, PT $=\sqrt{21}$ のとき, PR $=\boxed{}$ であり, 円 O の半径は $\boxed{}$ である.

(11) a を定数とし, $f(x)=x^2-2ax+a+6$ とする.
(a) x の方程式 $f(x)=0$ が実数解を持つような a の範囲を求めよ.
(b) 区間 $0\leqq x\leqq 1$ においてつねに $f(x)\geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ.

(18 愛知工業大)

(1) 絶対値を簡単に処理できなさそうなので, 丁寧に場合分けする.

◀ 簡単に処理できる例.
$|x-3|=5$,
$||x-2|-4|=9$

(i) $2\leqq x$ のとき

$$\begin{aligned}(x-1)-2(2-x)&=4\\ x&=3\end{aligned}$$

これは条件に適している.

(ii) $1\leqq x<2$ のとき

$$\begin{aligned}(x-1)+2(2-x)&=4\\ x&=-1\end{aligned}$$

これは不適.

(iii) $x<1$ のとき

$$\begin{aligned}-(x-1)+2(2-x)&=4\\ x&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

これは条件に適している.

以上より $x=\underline{\underline{3,\ \dfrac{1}{3}}}$

(2) 初項 1, 公比 $\sqrt{2}$ の等比数列の一般項は

$$a_n=\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}=2^{\frac{n-1}{2}}$$
$$\therefore a_n^2=\left(2^{\frac{n-1}{2}}\right)^2=2^{n-1}$$

したがって,

$$\sum_{n=1}^{10}a_n^2=\sum_{n=1}^{10}2^{n-1}=\frac{2^{10}-1}{2-1}=\underline{\underline{1023}}$$

ここで「$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{10}$ の異なる 2 項 $a_ia_j\ (i<j)$ すべての和」を S とおく.

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})\\ =&(a_1^2+a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_{10})+(a_2a_1+a_2^2+a_2a_3+\cdots+a_2a_{10})\\ &\quad+\cdots+(a_{10}a_1+a_{10}a_2+a_{10}a_3+\cdots+a_{10}a_9+a_{10}^2)\\ =&(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{10}^2)+2(\underbrace{a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_9a_{10}}_{S})\end{aligned}$$

となるので, この等式を $\sum$ を使って書き直せば

$$\left(\sum_{n=1}^{10} a_n\right)^2 = \sum_{n=1}^{10} a_n^2 + 2S$$
$$\therefore S = \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{n=1}^{10} a_n\right)^2 - \sum_{n=1}^{10} a_n^2\right\}$$

ここで,

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} = \frac{\sqrt{2}^{10}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{31}{\sqrt{2}-1} = 31\left(\sqrt{2}+1\right)$$

だから,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{n=1}^{10} a_n\right)^2 - \sum_{n=1}^{10} a_n^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left\{31\left(\sqrt{2}+1\right)\right\}^2 - 1023\right] \\ &= \frac{1}{2}\left\{961(3+2\sqrt{2}) - 1023\right\} = \underline{\underline{930+961\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

(3) $\tan\theta$ を $\sin\theta$, $\cos\theta$ のみで表す.

◀ sin, cos, tan は 3 つのうち 2 つあればもう 1 つを表せるので, どれか 1 つを消すことが多い. そのときに tan が選ばれやすいということ. tan を残すこともある. 例えば積分ではそのような変形も多々ある.

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$$

$\sin\theta\cos\theta$ が求まればいいわけだが, これは最初に与えられた式を 2 乗することで得られる;

$$\begin{aligned} (\sin\theta + \cos\theta)^2 &= \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2 \\ \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta &= \frac{8}{5} \\ 2\sin\theta\cos\theta &= \frac{3}{5} \\ \sin\theta\cos\theta &= \frac{3}{10} \end{aligned}$$

したがって,

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{3}{10}} = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$

これを $\tan\theta$ に関する方程式と見ると,

$$\begin{aligned} \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} &= \frac{10}{3} \\ \tan^2\theta - \frac{10}{3}\tan\theta + 1 &= 0 \\ 3\tan^2\theta - 10\tan\theta + 3 &= 0 \\ (3\tan\theta - 1)(\tan\theta - 3) &= 0 \\ \therefore \tan\theta &= \underline{\underline{\frac{1}{3},\ 3}} \end{aligned}$$

◀ θ に範囲がついていれば解の吟味が必要.

(4) $x-a$ の正負に気をつけて積分区間を分ける.

$$\begin{aligned} \int_0^1 |x-a|\,\mathrm{d}x &= \int_0^a -(x-a)\,\mathrm{d}x + \int_a^1 (x-a)\,\mathrm{d}x \\ &= -\left[\frac{1}{2}x^2 - ax\right]_0^a + \left[\frac{1}{2}x^2 - ax\right]_a^1 \\ &= -\left(\frac{1}{2}a^2 - a^2\right) + \left\{\left(\frac{1}{2} - a\right) - \left(\frac{1}{2}a^2 - a^2\right)\right\} \\ &= a^2 - a + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

これが $\frac{3}{8}$ に等しいので

$$\begin{aligned} a^2 - a + \frac{1}{2} &= \frac{3}{8} \\ 8a^2 - 8a + 1 &= 0 \\ a &= \frac{2\pm\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

これはどちらも $0 < a < 1$ を満たす. したがって $a = \underline{\underline{\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{4}}}$

(5) $z^5 = 1$ であることから

◀ z は 1 の原始 5 乗根.

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = \frac{z(z^5-1)}{z-1} = 0$$
$$\therefore z + z^2 + z^3 + z^4 = -z^5 = \underline{\underline{-1}}$$

また, $z\overline{z} = 1$, $z^5 = 1$ より, $\overline{z} = z^4$

$$\left(z + \overline{z}\right)^2 = \left(z + z^4\right)^2 = z^2 + 2z^5 + z^8 = z^2 + z^3 + 2$$

であることを用いて

$$\begin{aligned}(z+z^4)+(z^2+z^3)&=-1\\(z+z^4)+\left\{(z+z^4)^2-2\right\}&=-1\\(z+z^4)^2+(z+z^4)-1&=0\\z+\overline{z}&=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

$z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)=2\cos\dfrac{2\pi}{5}>0$ より

◀ $\mathrm{Re}(z)$ で z の実部, $\mathrm{Im}(z)$ で z の虚部を表す. ex)$\mathrm{Re}(5+3i)=5$, $\mathrm{Im}(2+2i)=2$

$$z+\overline{z}=\underline{\underline{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}}$$

(6) 因数分解できる.

◀ 問題の式の形が不自然. a^2-a はまだ a でくくれるのにくくられていない. 因数分解できることに気づくと, この式が誘導であることに気づく.

$$\begin{aligned}x^2-(a^2-3)x+(a^2-a)(a-3)&<0\\\left\{x-(a^2-a)\right\}\left\{x-(a-3)\right\}&<0\end{aligned}$$

ここで, a^2-a と $a-3$ の大小関係を調べる.

◀ 2 次不等式を解きたいわけだが, 大小関係がわからないと解けない.

$$\begin{aligned}(a^2-a)-(a-3)&=a^2+3>0\\\therefore a^2-a&>a-3\end{aligned}$$

したがって,2 次不等式の解は $\underline{\underline{a-3<x<a^2-a}}$

「この範囲 $(a-3<x<a^2-a)$ にある全ての x が $x^2-4<0(\Leftrightarrow x^2<4)$ を満たす」は,「x の定義域を $a-3<x<a^2-a$ としたとき, x^2 の最大値が 4 未満」と言い換えられる.

一般に, 上に凸の 2 次関数の最大値は定義域の両端どちらかで取るので

$$\begin{cases}(a-3)^2<4\\(a^2-a)^2<4\end{cases}$$

の両方を満たせば良い. 第 1 式より

$$\begin{aligned}-2<a-3&<2\\1<a&<5\qquad\cdots①\end{aligned}$$

第 2 式より

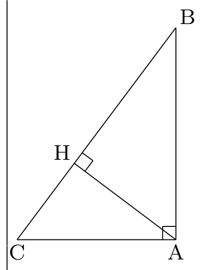
$$-2<a^2-a<2$$

$$\begin{cases}0<a^2-a+2=(a+2)(a-1)\\0>a^2-a-2=(a-2)(a+1)\end{cases}$$

この共通部分は $1<a<2$　　$\cdots②$

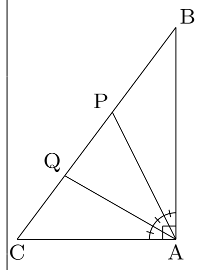
①, ② より, $\underline{\underline{1<a<2}}$

(7) △ABC の面積を 2 通りで表す.



$$\begin{aligned}\mathrm{AB}\times\mathrm{AC}&=\mathrm{BC}\times\mathrm{AH}\\4\times3&=5\times\mathrm{AH}\\\mathrm{AH}&=\underline{\underline{\frac{12}{5}}}\end{aligned}$$

△ABP と △ACP の面積比を考える.



$$\triangle\mathrm{ABP}:\triangle\mathrm{ACP}=\mathrm{BP}\cdot\mathrm{AH}:\mathrm{CP}\cdot\mathrm{AH}$$

一方で

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABP}:\triangle\mathrm{ACP}&=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AP}\sin30^\circ:\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AP}\sin60^\circ\\&=4:3\sqrt{3}\end{aligned}$$

したがって

$$\mathrm{BP}=\frac{4}{4+3\sqrt{3}}\mathrm{BC}=\underline{\underline{\frac{60\sqrt{3}-80}{11}}}$$

(8) 2 つの異なる実数解を持つとき, 判別式 $D=a^2-4b$ は正. D が正となる $(a,\ b)$ の組をすべてあげると,

$$\begin{aligned}(a,\ b)=&(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\\&(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5),(5,\ 6)\\&(6,\ 1),\ (6,\ 2),\ (6,\ 3),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)\end{aligned}$$

したがって確率 $\underline{\underline{\dfrac{17}{36}}}$

重解を持つとき $D=0$ なのでそのような $(a,\ b)$ の組は

$$(a,\ b)=(2,\ 1),\ (4,\ 4)$$

したがって確率 $\dfrac{2}{36}=\underline{\underline{\dfrac{1}{18}}}$

(9) ガウス記号の問題.

$$\left[\frac{100}{3}\right]+\left[\frac{200}{3}\right]=[33.3\ldots]+[66.6\ldots]=\underline{\underline{99}}$$

ガウス記号で文字を扱うときは, 不等式で扱うのが定石.

◀ $x-1<[x]\leqq x$

$$\frac{n}{3}-1<\left[\frac{n}{3}\right]\leqq\frac{n}{3}$$

$$\frac{2n+1}{3}-1<\left[\frac{2n+1}{3}\right]\leqq\frac{2n+1}{3}$$

辺々加えて,

$$\frac{3n-5}{3}<\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{2n+1}{3}\right]\leqq\frac{3n+1}{3}$$

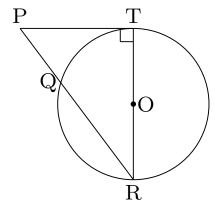
$$\frac{3n-5}{3}<100\leqq\frac{3n+1}{3}$$

$$299\leqq 3n<305$$

$$99<\frac{299}{3}\leqq n<\frac{305}{3}<102$$

$n=100$ のとき, $\left[\frac{100}{3}\right]+[67]=100,\ n=101$ のとき, $\left[\frac{101}{3}\right]+\left[\frac{202}{3}\right]=100$ となり確かに成り立つ. $n=\underline{\underline{100,\ 101}}$

(10) 方べきの定理より



$$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{PR}=\mathrm{PT}^2$$

$$3\cdot\mathrm{PR}=21$$

$$\therefore \mathrm{PR}=\underline{\underline{7}}$$

三平方の定理より

$$\mathrm{OR}=\frac{1}{2}\mathrm{TR}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\mathrm{PR}^2-\mathrm{PT}^2}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{7}=\underline{\underline{\sqrt{7}}}$$

(11) (a) $f(x)=x^2-2ax+a+6=0$ の判別式 D として,

$$D=4a^2-4(a+6)=4(a+2)(a-3)\geqq 0$$

$$\therefore\ \underline{\underline{a\leqq -2.\ 3\leqq a}}$$

(b) 「$0\leqq x\leqq 1$ においてつねに $f(x)\geqq 0$」を言い換えて「$0\leqq x\leqq 1$ での $f(x)$ の最小値が 0 以上」を解く.

下に凸な 2 次関数なので, 頂点または端点で最小値を取る.

いま, $f(x)=(x-a)^2-a^2+a+6$ だから頂点の x 座標は $x=a$ になり, (a) よりこれは $0\leqq x\leqq 1$ の区間外にある.

すなわち, 最小値は $f(0),\ f(1)$ のいずれかなので, 両方が正となる範囲を求めればそれが答えとなる.

$$\begin{cases} f(0)=a+6\geqq 0 \\ f(1)=-a+7\geqq 0 \end{cases}$$

以上より, $\underline{\underline{-6\leqq a\leqq 7}}$

The answer was written by $fa\ell$