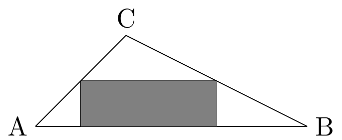
(1) x は $0 \leqq x \leqq 9$ を満たす整数とし，$x^3-9x^2+18x=t$ とする．$|t|$ の一の位が 0 となる x をすべて求めよ．

(2) $\sin\theta=t$ とする．$\sin 5\theta$ を t で表したときの t^3 の係数を求めよ．

(3) 不等式 $|x^2-2x-3|>3$ を解け．

(4) $b=a+\dfrac{1}{a}$ とする．$a^5+\dfrac{1}{a^5}$ を b の多項式で表わせ．

(5) 下図のように，$\mathrm{AB}=63$，$\mathrm{BC}=52$，$\mathrm{CA}=25$ である三角形に内接する長方形をつくる．このような長方形の面積の最大値を求めよ．



(6) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において, 曲線 $y=a\sin x$(a は定数) を C_1, 曲線 $y=\tan x$ を C_2 とする．$a>1$ であるとき, 2 つの曲線 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積を求めよ．

(7) $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2-a_n}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ の a_{11} を求めよ．

(8) y 軸上に点 A, x 軸上に点 B という異なる 2 点をとる．線分 AB を $a:b$ に外分する点を C とし, その座標を $(p,\ q)$ とする．このとき $b^2p^2+a^2q^2$ の値は AB^2 の何倍か．$p,\ q$ を用いずに表せ．

(9) 一辺の長さが 2 である正四面体 OABC がある．辺 OA 上に $\mathrm{OD}:\mathrm{DA}=2:1$, 辺 BC 上に $\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=3:2$ となるように点 D, E をとる．三角形 ODE の面積を求めよ．

(10) 複素数平面上に原点 O とは異なる 2 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$ があり

$$\beta=(1-i)\alpha$$

を満たしている. このとき $\triangle\mathrm{OAB}$ はどのような三角形か答えよ．

(11) 次の極限値を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\tan 2x}-\sqrt{1+\tan 2x}}{x}$$

(12) $\displaystyle\int_1^2 (\log x)^3\,\mathrm{d}x$ を求めよ．

(13) 以下の (A), (B), (C) の真偽の組み合わせとして正しいものを a から j の中から選べ．

(A) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$ である．

(B) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が収束して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$ である．

(C) $n\to\infty$ のとき, 数列 $\{a_nb_n\}$ が収束するならば 2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ はともに収束する．

解答の選択肢

a. (A) 真, (B) 真, (C) 真

b. (A) 真, (B) 真, (C) 偽

c. (A) 真, (B) 偽, (C) 真

d. (A) 真, (B) 偽, (C) 偽

e. (A) 偽, (B) 真, (C) 真

f. (A) 偽, (B) 真, (C) 偽

g. (A) 偽, (B) 偽, (C) 真

h. (A) 偽, (B) 偽, (C) 偽

(14) 次のデータの相関係数を求めよ．

x	8	4	2	6	10
y	4	5	6	3	2

(16 奈良県立医科大-医)

(1) 左辺を因数分解して

$$x(x-3)(x-6)=t$$

$|t|$ の一の位が 0 となるには t が 10 の倍数, つまり 2 の倍数かつ 5 の倍数である必要がある．

いま, x と $x-3$ の偶奇は一致しないので，$x(x-3)$ は必ず偶数となる. すなわち t はつねに偶数．

◀ x と $x-3$ のどちらかは必ず偶数.

よって x，$x-3$，$x-6$ のいずれかが 5 の倍数となれば良い．

(i) x が 5 の倍数となるのは $x=0,\ 5$ のとき．

(ii) $x-3$ が 5 の倍数となるのは $x=3,\ 8$ のとき．

(iii) $x-6$ が 5 の倍数となるのは $x=1,\ 6$ のとき．

したがって $x=\underline{\underline{0,\ 1,\ 3,\ 5,\ 6,\ 8}}$

(2) $\sin 5\theta$ の加法定理を考えて, $\sin 2\theta$，$\cos 2\theta$，$\sin 3\theta$，$\cos 3\theta$ がわかればよい．

◀（記述でも）3 倍角まで暗記しているならいきなり書いて良い. 一応 $\sin 3\theta$ の導出を載せておく.

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(\theta+2\theta)\\ &= \sin\theta\cos 2\theta+\cos\theta\sin 2\theta\\ &= \sin\theta(1-2\sin^2\theta)+\cos\theta\cdot 2\sin\theta\cos\theta\\ &= \sin\theta-2\sin^3\theta+2\sin\theta(1-\sin^2\theta)\\ &= 3\sin\theta-4\sin^3\theta\end{aligned}$$

◀ 2 倍角の公式.

◀ $cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

同様にして, $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ なので

$$\begin{aligned}\sin 5\theta &= \sin(2\theta + 3\theta)\\ &= \sin 2\theta\cos 3\theta + \cos 2\theta \sin 3\theta\\ &= 2\sin\theta\cos\theta(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + (1-2\sin^2\theta)(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)\\ &= 2\sin\theta\cos^2\theta(4\cos^2\theta - 3) + (3\sin\theta - 10\sin^3\theta + 8\sin^5\theta)\\ &= 2\sin\theta(1-\sin^2\theta)(1-4\sin^2\theta) + (3\sin\theta - 10\sin^3\theta + 8\sin^5\theta)\\ &= 2\sin\theta(1-5\sin^2\theta + 4\sin^4\theta) + (3\sin\theta - 10\sin^3\theta + 8\sin^5\theta)\\ &= 5\sin\theta - 20\sin^3\theta + 16\sin^5\theta\end{aligned}$$

したがって $\underline{\underline{-20}}$

(3) 与式から $x^2-2x-3>3$ または $x^2-2x-3<-3$ となればよい.

(i) $x^2-2x-3>3$ を解くと

$$x^2-2x-6>0$$

$x^2-2x-6=0$ の解は $x=1\pm\sqrt{7}$ だから

$$x<1-\sqrt{7},\ 1+\sqrt{7}<x$$

(ii) $x^2-2x-3<-3$ を解くと

$$\begin{aligned}x^2-2x&<0\\ x(x-2)&<0\\ 0<x&<2\end{aligned}$$

よってこれらの和集合は $\underline{\underline{x<1-\sqrt{7},\ 0<x<2,\ 1+\sqrt{7}<x}}$

(4) 二項定理より

◀ 複数の別解があるだろう.

$$\begin{aligned}b^5 &= \left(a+\frac{1}{a}\right)^5\\ &= a^5 + 5a^3 + 10a + 10\cdot\frac{1}{a} + 5\cdot\frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^5}\\ &= \left(a^5+\frac{1}{a^5}\right) + 5\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right) + 10\underbrace{\left(a+\frac{1}{a}\right)}_{=b}\end{aligned}$$

$$\therefore a^5+\frac{1}{a^5} = b^5 - 5\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right) - 10b$$

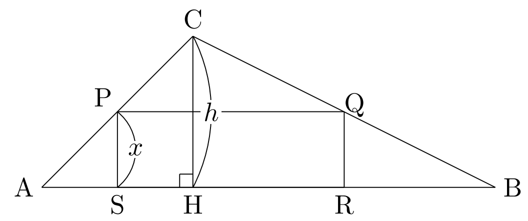
$a^3+\dfrac{1}{a^3}$ を b のみで表せば良い.

$$\begin{aligned}b^3 &= \left(a+\frac{1}{a}\right)^3\\ &= a^3 + 3a + 3\cdot\frac{1}{a} + \frac{1}{a^3}\\ &= \left(a^3+\frac{1}{a^3}\right) + 3\left(a+\frac{1}{a}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore a^3+\frac{1}{a^3} = b^3 - 3b$$

したがって,

$$\begin{aligned}a^5+\frac{1}{a^5} &= b^5 - 5\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right) - 10b\\ &= b^5 - 5\left(b^3-3b\right) - 10b \qquad = \underline{\underline{b^5-5b^3+5b}}\end{aligned}$$



(5)

上図のように, C から AB におろした垂線の足を H, CH の長さを h, 長方形の辺のうち, CH と平行なものの長さを x とおく.

◀ h は定数であることに注意.(3 辺が決まっているから)

また, 長方形の頂点のうち AC 上のものを P, BC 上のものを Q, BH 上のものを R, AH 上のものを S とおく.

このとき $\triangle\mathrm{APS} \backsim \triangle\mathrm{ACH}$ から $\mathrm{AH}:\mathrm{SH} = h : h-x$

同様に $\triangle\mathrm{BQR} \backsim \triangle\mathrm{BCH}$ から $\mathrm{BH}:\mathrm{RH} = h : h-x$

よって, $\mathrm{AB}:\mathrm{SR} = h : h-x$ だから $\mathrm{SR} = \dfrac{h-x}{h}\mathrm{AB} = 63\left(1-\dfrac{x}{h}\right)$

したがって長方形の面積

$$\begin{aligned}S(x) &= x\cdot 63\left(1-\frac{x}{h}\right)\\ &= -\frac{63}{h}(x^2-hx)\\ &= -\frac{63}{h}\left(x-\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{63}{4}h\end{aligned}$$

したがって $x=\dfrac{h}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{63}{4}h$ をとる.

◀ h を求めるのが面倒だったのでここまで避けてきたが, 回避できなかった. ここから h を求める.

$\boxed{\text{解法 1}}$ △ABC の面積はヘロンの公式より $\left(\frac{63+52+25}{2}=70\right)$

$$\triangle \mathrm{ABC}=\sqrt{70\cdot(70-63)\cdot(70-52)\cdot(70-25)}=\sqrt{70\cdot 7\cdot 18\cdot 45}=630$$

したがって $\dfrac{1}{2}\cdot 63\cdot h=630$ より $h=20$

$\boxed{\text{解法 2}}$ 余弦定理より

$$\cos\angle\mathrm{ACB}=\frac{63^2+25^2-52^2}{2\cdot 63\cdot 25}=\frac{1890}{2\cdot 63\cdot 25}=\frac{3}{5}$$
$$\therefore \sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{4}{5}$$

△ABC の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 63\cdot 25\cdot\frac{4}{5}=630$$

あとは解法 1 に同じ.

$\boxed{\text{解法 3}}$ AH の長さを y とおく. 三平方の定理より

$$\begin{cases} h^2=25^2-y^2 \\ h^2=52^2-(63-y)^2 \end{cases}$$

よって

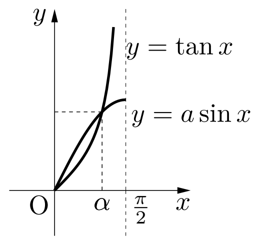
$$\begin{aligned} 25^2-y^2&=52^2-(63-y)^2 625-y^2 \quad =2704-3969+126y-y^2\\ 126y&=1890\\ y&=15 \end{aligned}$$

これより, $h=\sqrt{25^2-15^2}=5\sqrt{5^2-3^2}=20$

以上解法 1 から 3 のいずれかを用いることで h を得る.

長方形の面積の最大値は $\dfrac{63}{4}\cdot 20=\underline{\underline{315}}$

(6)



2 曲線の交点は

$$\begin{aligned} a\sin x&=\tan x\\ a&=\frac{1}{\cos x}\\ \cos x&=\frac{1}{a} \end{aligned}$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ と $a>1$ より, この方程式は唯一の解を持つ. その解を α とする. すなわち,$\cos\alpha=\dfrac{1}{a}$

このとき, $0<x<\alpha$ で $\cos x$ は単調減少だから

$$a\sin x-\tan x=\tan x\,(a\cos x-1)>\sin x\left(a\cdot\frac{1}{a}-1\right)>0$$

となることに気をつけると, 求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\alpha}(a\sin x-\tan x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\alpha}\left(a\sin x+\frac{-\sin x}{\cos x}\right)\mathrm{d}x\\ &=\Big[-a\cos x+\log|\cos x|\Big]_0^{\alpha}\\ &=(-a\cos\alpha+\log|\cos\alpha|)-(-a+\log 1)\\ &=\left(-a\cdot\frac{1}{a}+\log\frac{1}{a}\right)-(-a+0)\\ &=\underline{\underline{-1-\log a+a}} \end{aligned}$$

(7) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とすると, 漸化式は以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} b_1&=\frac{1}{a_1}=2\\ \frac{1}{a_{n+1}}&=\frac{2-a_n}{a_n}=\frac{2}{a_n}-1\\ \therefore b_{n+1}&=2b_n-1 \end{aligned}$$

b_n の漸化式を解くと

◀ 特性方程式 $t=2t-1$ の解は $t=1$

$$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$$

数列 $\{b_n-1\}$ は初項 $b_1-1=2-1=1$, 公比 2 の等比数列なので

$$\begin{aligned} b_n-1&=2^{n-1}\\ b_n&=2^{n-1}+1 \end{aligned}$$

したがって

$$b_{11} = 2^{10} + 1 = 1025$$
$$a_{11} = \frac{1}{b_{11}} = \underline{\underline{\frac{1}{1025}}}$$

(8) A の座標を $(0,\ y)$, B の座標を $(x,\ 0)$ とする．

線分 AB を $a:b$ に外分する点 C の座標は $\left(\dfrac{ax}{a-b},\ \dfrac{-by}{a-b}\right)$ となる．

したがって $p = \dfrac{ax}{a-b},\ q = -\dfrac{by}{a-b}$

$$\begin{aligned} b^2p^2 + a^2q^2 &= b^2\left(\frac{ax}{a-b}\right)^2 + a^2\left(-\frac{by}{a-b}\right)^2 \\ &= \frac{a^2b^2x^2}{(a-b)^2} + \frac{a^2b^2y^2}{(a-b)^2} \\ &= \frac{a^2b^2}{(a-b)^2}\left(x^2+y^2\right) \\ &= \left(\frac{ab}{a-b}\right)^2 \mathrm{AB}^2 \end{aligned}$$

したがって $\underline{\underline{\left(\dfrac{ab}{a-b}\right)^2}}$ 倍

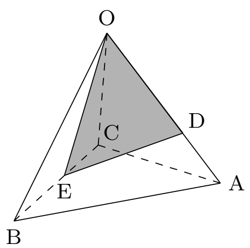
(9)

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{5}$$

三角形 ODE の面積 S を求めるには, $\sin\angle\mathrm{DOE}$ がわかればよい． $\cos\angle\mathrm{DOE} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{OE}}|}$ であるので $\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}},\ |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{OE}}|$ を求める．

一辺の長さが 2 の正四面体であるから,

$$\begin{cases} |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 2 \\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 2\cdot 2\cdot\cos 60^\circ = 2 \end{cases}$$



$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{5}\right) = \frac{4}{15}\cdot 2 + \frac{2}{5}\cdot 2 = \frac{4}{3}$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = \frac{2}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \frac{4}{3}$$
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2 &= \left(\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{5}\right)^2 \\ &= \frac{4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 + 12\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 9|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}{25} \\ &= \frac{16+24+36}{25} \\ &= \frac{76}{25} \end{aligned}$$
$$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{OE}}| = \frac{2\sqrt{19}}{5}$$

以上より,

$$\cos\angle\mathrm{DOE} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{OE}}|} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}\cdot\frac{2\sqrt{19}}{5}} = \frac{5}{2\sqrt{19}}$$
$$\therefore \sin\angle\mathrm{DOE} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{2\sqrt{19}}\right)^2} = \sqrt{\frac{76-25}{4\cdot 19}} = \frac{\sqrt{51}}{2\sqrt{19}}$$
$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OD}}||\overrightarrow{\mathrm{OE}}|\sin\angle\mathrm{DOE} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2\sqrt{19}}{5}\cdot\frac{\sqrt{51}}{2\sqrt{19}} \\ &= \underline{\underline{\frac{2\sqrt{51}}{15}}} \end{aligned}$$

(10) 極形式で表すと

$$\beta = (1-i)\alpha = \sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}\alpha$$

つまり $\mathrm{OB} = \sqrt{2}\mathrm{OA}$ かつ $\angle\mathrm{AOB} = 45^\circ$ であることが分かる．

これは $\underline{\underline{\ \mathrm{OA} = \mathrm{AB}\ \text{の直角二等辺三角形}\ }}$．

◀ 直角二等辺三角形を一つ思い浮かべれば, それと △OAB が相似なことは「2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい」からわかる

(11) 分子の有理化を行う.

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\tan 2x}-\sqrt{1+\tan 2x}}{x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1-\tan 2x}-\sqrt{1+\tan 2x}\right)\left(\sqrt{1-\tan 2x}+\sqrt{1+\tan 2x}\right)}{x\left(\sqrt{1-\tan 2x}+\sqrt{1+\tan 2x}\right)}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{-2\tan 2x}{x\left(\sqrt{1-\tan 2x}+\sqrt{1+\tan 2x}\right)}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\left(\sqrt{1-\tan 2x}+\sqrt{1+\tan 2x}\right)}\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{1}{x}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\left(\sqrt{1-\tan 2x}+\sqrt{1+\tan 2x}\right)}\cdot\frac{\sin 2x}{2x}\cdot\frac{2}{\cos 2x}\\
=&\frac{-2}{1+1}\cdot 1\cdot\frac{2}{1}\\
=&\underline{\underline{-2}}
\end{aligned}
$$

(12) 対数関数の積分なので部分積分を繰り返し適用.

$$
\begin{aligned}
\int_1^2(\log x)^3\,\mathrm{d}x &= \left[x(\log x)^3\right]_1^2-\int_1^2 x\cdot 3(\log x)^2\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\
&=2(\log 2)^3-3\int_1^2(\log x)^2\,\mathrm{d}x\\
&=2(\log 2)^3-3\left[x(\log x)^2\right]_1^2+3\int_1^2 x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\
&=2(\log 2)^3-6(\log 2)^2+6\int_1^2\log x\,\mathrm{d}x\\
&=2(\log 2)^3-6(\log 2)^2+6\left[x\log x-x\right]_1^2\\
&=2(\log 2)^3-6(\log 2)^2+6(2\log 2-2+1)\\
&=\underline{\underline{2(\log 2)^3-6(\log 2)^2+12\log 2-6}}
\end{aligned}
$$

(13) (A) 偽. 反例は $a_n=2n, b_n=n$ なら仮定を満たすが $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{x\to\infty}n=+\infty$

(B) 偽. 反例は $a_n=b_n=\dfrac{1}{n}$ とすれば $\alpha=\beta\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n}=0$ となるが, $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{0}{0}$ となり, 定義されない.

(C) 偽. 反例は $a_n=n, b_n=\dfrac{1}{n}$ とすると, $a_nb_n=1$ より $n\to\infty$ で極限は 1 に収束. しかし a_n の $n\to\infty$ での極限は発散.

よって解答は $\underline{\underline{\text{h}}}$

(14) x の平均は $\frac{8+4+2+6+10}{5}=6$, y の平均は $\frac{4+5+6+3+2}{5}=4$

(分散) = (2 乗の平均) − (平均の 2 乗) だから

x の分散は $\frac{8^2+4^2+2^2+6^2+10^2}{5}-6^2=8$, y の分散は $\frac{4^2+5^2+6^2+3^2+2^2}{5}-4^2=2$

(共分散) = (xy の平均) − (x の平均)(y の平均) だから

x と y の共分散は $\frac{8\cdot4+4\cdot5+2\cdot6+6\cdot3+10\cdot2}{5}-6\cdot 4=-\dfrac{18}{5}$

したがって相関係数は

$$\frac{-\frac{18}{5}}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}=\underline{\underline{-0.9}}$$

◀ s_{xy}; 共分散, s_x, s_y;x, y の標準偏差 $(=\sqrt{分散})$ このとき相関係数 r は $r=\frac{s_{xy}}{s_xs_y}$

The answer was written by $f a \ell$