(1) さいころを 1 回投げて, 出た目の数の枚数のコインを投げ, コインの表の枚数を得点とする．得点が 4 である確率を求めよ．

(2) 実数 x, y は条件

$$0 \leqq x \leqq y \leqq \frac{\pi}{2},\ \sin x+\sin y=\frac{4}{5},\ \cos 2x+\cos 2y=\frac{6}{5}$$

をすべて満たすものとする．

(a) $\sin x$ を求めよ．

(b) $\sin(y-x)$ を求めよ．

(3) 2 つの放物線

$$y=\frac{1}{2}x^2,\ y=x^2-4x-1$$

の両方に接する直線の方程式をすべて求めよ．

(4) 多項式 $x^{1010}+x^{101}+x^{10}+x$ を x^3-x で割ったときのあまりを求めよ．

(19 学習院-法・改)

(1) サイコロの目で場合分け．

(i) サイコロの目が 4 のとき

コインを 4 回投げて 4 回表になる確率は,

$$\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{サイコロで 4}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2^4}}_{\text{4 枚中 4 枚表}} = \frac{1}{96}$$

(ii) サイコロの目が 5 のとき

コインを 5 回投げて 4 回表になる確率は,

$$\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{サイコロで 5}} \cdot \underbrace{{}_5\mathrm{C}_4 \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{5 枚中 4 枚表}} = \frac{5}{192}$$

(iii) サイコロの目が 6 のとき

コインを 6 回投げて 4 回表になる確率は,

$$\underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{サイコロで 6}} \cdot \underbrace{{}_6\mathrm{C}_4 \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^2}}_{\text{6 枚中 4 枚表}} = \frac{15}{384}$$

(i) から (iii) より, $\dfrac{1}{96}+\dfrac{5}{192}+\dfrac{15}{384}=\underline{\underline{\dfrac{29}{384}}}$

(2) (a) 2 倍角の公式より

$$\begin{aligned}\cos 2x+\cos 2y&=\frac{6}{5}\\(1-2\sin^2 x)+(1-2\sin^2 y)&=\frac{6}{5}\\\sin^2 x+\sin^2 y&=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

ここでもう一つの条件式より $\sin y=\dfrac{4}{5}-\sin x$ を代入して

$$\begin{aligned}\sin^2 x+\left(\frac{4}{5}-\sin x\right)^2&=\frac{2}{5}\\25\sin^2 x-20\sin x+3&=0\\(5\sin x-3)(5\sin x-1)&=0\\\sin x&=\frac{3}{5},\ \frac{1}{5}\end{aligned}$$

$\sin x=\dfrac{3}{5}$ のとき $\sin y=\dfrac{1}{5}$, $\sin x=\dfrac{1}{5}$ のとき $\sin y=\dfrac{3}{5}$

となるが, $x \leqq y$ より $\underline{\underline{\sin x=\dfrac{1}{5}}}$, $\sin y=\dfrac{3}{5}$

(b) (a) と $0 \leqq x \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\dfrac{4}{5}$ だから

$$\begin{aligned}\sin(y-x)&=\cos x\sin y-\sin x\cos y\\&=\frac{2\sqrt{6}}{5}\cdot\frac{3}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\\&=\underline{\underline{\frac{6\sqrt{6}-4}{25}}}\end{aligned}$$

(3) 求める直線 $ax+by+c=0$ とする．

◀ $y=ax+b$ とおくと, $x=2$ といった直線を表現できない．

$y=\dfrac{1}{2}x^2$ と接するから

$$ax+b\cdot\frac{1}{2}x^2+c=0$$

は重解を持つ. この判別式がゼロになるので

$$\begin{aligned}a^2-4\cdot\frac{b}{2}\cdot c&=0\\a^2-2bc&=0 \qquad \cdots①\end{aligned}$$

また, $y=x^2-4x-1$ とも接するので

$$\begin{aligned} &ax+b(x^2-4x-1)+c=0 \\ \Leftrightarrow\ &bx^2+(a-4b)x+c-b=0 \end{aligned}$$

の判別式がゼロとなる.

$$\begin{aligned} &(a-4b)^2-4\cdot b(c-b)=0 \\ &a^2-8ab+20b^2-4bc=0 \qquad \cdots ② \end{aligned}$$

① より $2bc=a^2$ を② に代入して

$$\begin{aligned} a^2-8ab+20b^2-2a^2&=0 \\ a^2+8ab-20b^2&=0 \\ (a-2b)(a+10b)&=0 \end{aligned}$$

したがって $a=2b,\ -10b$

$a=2b$ のとき, $2bc=a^2$ より

$$\begin{aligned} 2bc&=4b^2 \\ c&=2b \end{aligned}$$

$a=-10b$ のとき, $2bc=a^2$ より

$$\begin{aligned} 2bc&=100b^2 \\ c&=50b \end{aligned}$$

したがって, 求める直線は $2bx+by+2b=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{2x+y+b=0}}$ または $-10bx+by+50b=0 \Leftrightarrow \underline{\underline{-10x+y+50=0}}$

◀ 別解として, $y=\dfrac{1}{2}x^2$ の接線を, 接点の x 座標 t を含む形で表し, $y=x^2-4x-1$ に接するときの t の値を求める解法が考えられる.

(4) 3 次式で割っているので, あまりは 2 次式であることから, $x^{1010}+x^{101}+x^{10}+x$ を x^3-x で割ったあまりを ax^2+bx+c とする. $Q(x)$ を x の整式として

$$\begin{aligned} &x^{1010}+x^{101}+x^{10}+x=Q(x)\cdot(x^3-x)+ax^2+bx+c \\ &x^{1010}+x^{101}+x^{10}+x=Q(x)\cdot x(x+1)(x-1)+ax^2+bx+c \end{aligned}$$

$x=-1,\ 0,\ 1$ をそれぞれ代入して

$$\begin{cases} 1+(-1)+1+(-1)=a-b+c \\ 0+0+0+0=c \\ 1+1+1+1=a+b+c \end{cases}$$

これを解いて, $a=2,\ b=2,\ c=0$ すなわち答えは $\underline{\underline{2x^2+2x}}$

The answer was written by $fa\ell$