(1) $2^x = 5^y = 160$ であるとき, $xy - x - 5y + 5 = \boxed{\text{ア}}$ である.

(2) 整式 $P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割るとあまりは $4x$ であり，$(x-3)(x-1)$ で割るとあまりは $3x+3$ である. このとき, $P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割るとあまりは $\boxed{\text{イ}}x + \boxed{\text{ウ}}$ である.

(3) $a = 9 + 4\sqrt{5},\ b = 5 - 2\sqrt{6}$ とすると,

$$\frac{1}{a} = \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$

$$\frac{1}{b} = \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}$$

$$ab + \frac{1}{ab} = \boxed{\text{コサ}} - \boxed{\text{シス}}\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}$$

である.

(14 東洋-理工他)

(1) 仮定より

$$x = \log_2 160 = \log_2 (2^5 \cdot 5) = 5 + \log_2 5$$

$$y = \log_5 160 = \log_5 (2^5 \cdot 5) = 5\log_5 2 + 1 = \frac{5}{\log_2 5} + 1$$

したがって

$$xy - x - 5y + 5 = (x-5)(y-1) = (5 + \log_2 5 - 5)\left(\frac{5}{\log_2 5} + 1 - 1\right) = \underline{\underline{5}}$$

(2) 以下, $Q_n(x)$ を x の整式とする.

$$\begin{cases} P(x) = (x-2)(x-3)Q_1(x) + 4x & \cdots ① \\ P(x) = (x-3)(x-1)Q_2(x) + 3x + 3 & \cdots ② \\ P(x) = (x-2)(x-1)Q_3(x) + ax + b & \cdots ③ \end{cases}$$

① より $P(2) = 8$, ② より $P(1) = 6$

したがって③ にそれぞれ代入して

$$\begin{cases} 6 = P(1) = a + b \\ 8 = P(2) = 2a + b \end{cases}$$

これを解いて, $a = 2,\ b = 4$ となるので求めるあまりは $\underline{\underline{2x+4}}$

(3) 有理化して

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{9+4\sqrt{5}} = \frac{9-4\sqrt{5}}{81-80} = \underline{\underline{9-4\sqrt{5}}}$$

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{5-2\sqrt{6}} = \frac{5+2\sqrt{6}}{25-24} = \underline{\underline{5+2\sqrt{6}}}$$

$$\begin{aligned} ab + \frac{1}{ab} &= (9+4\sqrt{5})(5-2\sqrt{6}) + (9-4\sqrt{5})(5+2\sqrt{6}) \\ &= 2(45 - 8\sqrt{30}) = \underline{\underline{90 - 16\sqrt{30}}} \end{aligned}$$

◀ $(a+b)(c-d) + (a-b)(c+d) = 2(ac-bd)$

The answer was written by $fa\ell$