1

(1) $(a+2b+3c)^6$ の展開式における a^3b^2c の係数を求めなさい.

(2) 実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2 \leqq 2$ をみたすとき, $5x+y$ の最大値及び最小値を求めなさい.

(3) $\log_{10} 2 = 0.3010$ を用いて以下の問いに答えなさい.

(i) 5^{15} の桁数を求めなさい.

(ii) 5^{15} と 2^{40} の大小を比較しなさい.

(4) 関数 $y=x^2+1$ および $y=-x^2+2x+4$ のグラフで囲まれた図形の面積を求めなさい.

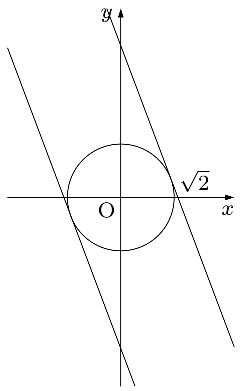
1　16 福島-人文 A

(1) 同じものを含む順列の考え方から

$$\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}\times 1^3\cdot 2^2\cdot 3^1 = \underline{\underline{720}}$$

(2) $5x+y=k$ とおき, k の最大最小を調べる.

$x^2+y^2 \leqq 2$ が示す領域は円の周及び内部だから, $x^2+y^2=2$ と直線 $5x+y-k=0$ が接するときの k が最大最小となる. このとき, 原点と直線との距離が半径になることから



$$\frac{|-k|}{\sqrt{5^2+1^2}} = \sqrt{2}$$
$$k = \pm 2\sqrt{13}$$

したがって最大は $\underline{\underline{2\sqrt{13}}}$, 最小は $\underline{\underline{-2\sqrt{13}}}$.

(3) (i) 両辺の対数をとって

$$\begin{aligned}
10^{n-1} &\leqq 5^{15} < 10^n \\
n-1 &\leqq 15\log_{10} 5 < n \\
n-1 &\leqq 15(1-\log_{10} 2) < n \\
n-1 &\leqq 15\cdot 0.6990 < n \\
n-1 &\leqq 10.485 < n \\
\therefore n &= \underline{\underline{11}}
\end{aligned}$$

(ii) $\log_{10} x$ は単調増加関数なので,

$$\log_{10} 5^{15} = 15\log_{10} 5 = 10.485$$
$$\log_{10} 2^{40} = 40\log_{10} 2 = 40\cdot 0.3010 = 12.04$$

より, $\underline{\underline{5^{15} < 2^{40}}}$

(4) $y=x^2+1$ は下に凸, $y=-x^2+2x+4$ は上に凸.

$$\begin{aligned}
(-x^2+2x+4)-(x^2+1) &= 0 \\
-2x^2+2x+3 &= 0
\end{aligned}$$

この方程式の解を $x=\alpha,\ \beta$ とする $(\alpha<\beta)$

求める面積は

$$\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^\beta \left\{(-x^2+2x+4)-(x^2+1)\right\} \mathrm{d}x \\
&= \int_\alpha^\beta (-2x^2+2x+3)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+3x\right]_\alpha^\beta \\
&= -\frac{2}{3}(\beta^3-\alpha^3)+(\beta^2-\alpha^2)+3(\beta-\alpha) \\
&= -\frac{2}{3}(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)+(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)+3(\beta-\alpha) \\
&= -\frac{2}{3}(\beta-\alpha)\left\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\right\}+(\alpha+\beta)(\beta-\alpha)+3(\beta-\alpha)
\end{aligned}$$

ここで, 解と係数の関係から

$$\begin{cases}
\alpha+\beta = 1 \\
\alpha\beta = -\dfrac{3}{2} \\
\beta-\alpha = \sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta} = \sqrt{1^2-4\cdot\left(-\dfrac{3}{2}\right)} = \sqrt{7}
\end{cases}$$

したがって

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{2}{3}\sqrt{7}\left\{1^2-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}+1\cdot\sqrt{7}+3\sqrt{7} \\
&= \underline{\underline{\frac{7\sqrt{7}}{3}}}
\end{aligned}$$

The answer was written by $fa\ell$